СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В документе собраны задачи youtube-канала Valery Volkov, разбитые по темам. Задачи подобраны с учетом классической абитуриентской подготовки (вторая часть ЕГЭ и вступительные олимпиады). Данная часть задачника посвящена алгебре.

Для перехода к видеоразбору конкретной задачи нужно кликнуть по её номеру перед условиями задачи.

Символы i, ii, iii в скобках означают разборы аналогичных задач, схожих по идее решения, но с другими числами.

Удачи и плодотворной работы!

§1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1.1. Повторение арифметики

1.1.1. Сократите дроби:

1) $\frac{1010111110101}{1100111110011}$ 2) $\frac{10!-9!-8!}{10!+9!+8!}$

1.1.2. Сравните дроби:

1) $\frac{7}{33}$ и $\frac{21212121}{99999999}$; 2) $\frac{2020}{2021}$ и $\frac{2021}{2022}$; 3) $\frac{2022!}{2023!}$ и $\frac{2021!}{2022!}$;

1.2. Формулы сокращённого умножения

Теория: Формулы сокращённого умножения

1.2.1. Выполните действия:
1) $(5a-b)(5a+b)$;
2) $(x-7)^2-3x(x+5)$.
1.2.2. Разложите на множители:
1) m^3-m^2-9m+9;
2) $4t^2-(t-5)^2$.

1.3. Разложение на множители

1.3.1 Найдите значение выражения: $\frac{43^3+17^3}{43^3+26^3}$.

1.3.2 Разложите на множители:
1) (i, ii, iii, iv) x^4+4;
2) $1+x^5$;
3) (i) $(x+y+z)-x^3-y^3-z^3$;
4) $a^3+b^3+c^3-3abc$;
5) a^n-b^n;
6) x^5-1;
7) $1+n^4+n^8$;
8) x^4-x^2+1;
9) $x^4+x^3+x^2+x+12$;
10) x^8+x+1.

1.4. Алгебраические дроби

1.4.1. Упростите выражение: $\frac{c^2+4c+4}{c^2-4}:(c+2)$.
1.4.2. Найдите значение выражения $\frac{a^2-81}{2a^2+18a}$ при $a=4,5$.
1.4.3. (i) Найдите значение выражения $\frac{a^2-25b^2}{5ab}:\left(\frac{1}{5b}-\frac{1}{a}\right)$ при $a=8\frac{1}{16}$ и $b=6\frac{3}{16}$.
1.4.4. Найдите значение выражения $\frac{5ac^2}{a^2-4c^2}\cdot\frac{a-2c}{ac}$ при $a=-5,2$ и $c=-2,4$.
1.4.5. Найдите значение выражения $\frac{64b^2+128b+64}{b}:\left(\frac{4}{b}+4\right)$ при $b=-\frac{15}{16}$.

1.4.6. Найдите значение выражения $\frac{a}{a^2-b^2} : \frac{a}{ab+b^2}$ при $a = 1,1$ и $b = 0,6$.

1.4.7. Найдите значение выражения: $(a^3 - 16a) \cdot \left(\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a-4}\right)$ при $a = -45$.

1.4.8. Найдите значение выражения $\left(\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}\right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \frac{y^4}{x^2-y^2}$ при $x = \sqrt{7}$ и $y = \sqrt{3}$.

1.4.9. Найдите значение выражения $\frac{(m-n+1)^2-(m-1+n)^2}{4m} \cdot (n+1)$ при $m = 1\frac{12}{13}$ и $n = \sqrt{2}$.

1.4.10. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left((a+b)^2 - \frac{a^3-b^3}{a-b}\right)$ при $a = 2 - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{5} - 1$.

1.4.11. Найдите числа a, b, c такие, что выполняются равенства:

1) $\frac{2x^2+3x-3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$;

2) $\frac{1}{(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2x+1}$; $\frac{x^2+6x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$; $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$.

1.4.12. (i) Найдите значение выражения $31a - 4b + 55$, если $\frac{a-4b+7}{4a-b+7} = 8$.

1.4.13. Известно, что $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$ и $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 1$. Найти значение выражения $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}$.

1.4.14. Известно, что $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найти значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$.

1.4.15. Найдите значение выражения $a^6 + \frac{1}{a^6}$, если $a^2 - 3a + 1 = 0$.

1.4.16. (i) Найдите значение выражения $x^3 + \frac{1}{x^3}$, если $x + \frac{1}{x} = 7$

1.4.17. Найдите значение выражения $a^4 + \frac{1}{a^4}$, если $a - \frac{1}{a} = 3$

1.4.18. Найдите значение выражения $x^{2022} + \frac{1}{x^{2022}}$, если $x - \frac{1}{x} = 0$

1.4.19. Известно, что $\begin{cases} \frac{p}{x+y+z} = \frac{1}{4} \\ \frac{2p}{x+2y-t} = \frac{1}{3} \\ \frac{p}{2x-y-z+t} = 1 \end{cases}$. Найдите значение выражения: $\frac{7x-4z+t}{p}$.

1.5. Min-max значения

1.5.1. Найдите наименьшее значение и наибольшее значение выражения $x+y$, если $x^2+xy+y^2 = 6,75$.

1.5.2. Решите уравнение: $a^2 - ab + b^2 - bc + c^2 - cd + d^2 - d + 0,4 = 0$.

1.5.3. Найдите максимум выражения: $\frac{x^2}{x^4+25}$.

1.5.4. Докажите неравенство: $5x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 2y + 5 \geq 0$.

1.5.5. Решите уравнение с двумя неизвестными: $5x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$.

1.5.6. Решите уравнение: $3x^2 + 2xy + y^2 = 2y - 6x - 9$.

1.5.7. Известно, что $x + y \geq 4$. Доказать, что $x^2 + y^2 \geq 8$.

§2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Линейные уравнения

2.1.1. Решите уравнения:

1) $-x - 7 = x$;

2) $7x - 9 = 40$;

3) $9 + 2(3 - 4x) = 2x - 3$;

4) (i) $-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$;

5) (i) $\frac{5x+4}{2} + 3 = \frac{9x}{4}$;

6) $\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)} \cdot x = 10$;

7) $2\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4}x = 2\frac{3}{4}x$.

2.1.2. Решите уравнения:

1) $x^2 + 9 = (x + 9)^2$

2) $(x + 3)^2 + (x - 7)^2 = 2x^2$

2.2. Квадратные уравнения

2.2.1. Решите неполные квадратные уравнения:

1) (i) $4x^2 = 12,25$

2) $\frac{1}{4}x^2 - 36 = 0$

3) $\frac{9}{x^2-16} = 1$

4) $2x^2 + 12x = 0$

5) $5x^2 + 5 = 5 - 30x$

2.2.2. Решите квадратные уравнения:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^2 - 17x + 72 = 0$

3) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

4) $x^2 = -11x - 28$

5) $(x - 6)^2 = -24x$

6) $4x^2 + 6x - 2 = (x - 1)^2$

7) $2021x^2 - x - 2020 = 0$

Теория:

Вывод формулы корней.

Решение квадратного уравнения (число корней и дискриминант).

Выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена.

Разложение квадратного трехчлена на множители.

Метод переброски для решения квадратного уравнения. (i, ii)

Теорема Виета.

2.3. Разложение на множители

2.3.1. Решите уравнения:

1) (i, ii) $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$

2) $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$

3) $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$

4) $(x-2)^2 (x-3) = 12(x-2)$

5) $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-2)(x-3)(x-5)$

6) $(x+7)^3 = 49(x+7)$

7) $x\left(x^2+2x+1\right) = 2(x+1)$

2.3.2. Решите уравнения:

1) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$

2) $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = -1$

2.4. Дробно-рациональные уравнения

2.4.1. Решите уравнения:

1) (i) $\frac{1}{4x-1} = 5$

2) $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$

3) $\frac{x-119}{x+7} = -5$

2.4.2. Решите уравнения:

1) $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$

2) $\frac{16-4x^2}{x-4} = 0$

3) $x = \frac{6x-15}{x-2}$

4) (i) $\frac{2x^2+4x-6}{x^2-9} = 1$

5) $\frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-6}$

6) $\frac{3(x-3)+2x-1}{x-2} = 4x+1$

2.5. Уравнения высоких степеней. Теорема Безу.

2.5.1. Решите уравнения:

1) (i) $(x-1)^3 = -8$

2) (i) $x^6 = (x-5)^3$

3) (i) $x^4 = (x-20)^2$

2.5.2. Решите уравнение: $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7}{9} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

2.5.3. Решите уравнения:

1) $\frac{x^{17}-x^{16}+x^{15}-\ldots-x^2+x-1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = 21.$

2) $(x+1)^{2019} + (x+1)^{2018}(x-1) + (x+1)^{2017}(x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{2019} = 0$

2.5.4. Решите уравнение: $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Теория: Теорема Безу и деление многочлена столбиком.

2.5.5. Решите уравнения:

1) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

2) $x(x+1)^2 + (x+1)\,x^2 = 30$

2.6. Сведение к квадратным уравнениям.

Теория: Биквадратное уравнение.

2.6.1. Решите уравнения:

1) $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$

2) $\left(x^2 + x - 3\right)^2 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$

3) $x^4 - 2x^3 + x = 30$

2.6.2. Решите уравнения:

1) (i, ii) $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} - 4 = 0$

2) $\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = 2,9$

2.6.3. Решите уравнения:

1) (i, ii) $(x-1)\,(x-3)\,(x+5)\,(x+7) = 297$

2) $\left(x^2 + 3x + 2\right)\left(x^2 + 9x + 18\right) = 168x^2$

3) (i) $(x-1)\,(x-2)\,(x-4)\,(x-8) = 7x^2$.

4) $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$

5) $\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x(x+1)^2} = \frac{625}{112}$

2.6.4. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

2) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7} = 0$

2.6.5. Решите уравнения:

1) (i, ii, iii) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 4$.

2) $x^5 + (6-x)^5 = 1056$.

3) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.

Теория: Возвратные уравнения.

2.6.6. Решите уравнения:

1) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

2) $9x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 2x + 1 = 0$

3) $x^4 = \frac{11x-6}{6x-11}$

2.6.7. (i, ii) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;3]$

2.7. Другие типы уравнений. Использование свойств функций.

2.7.1. Решите уравнения:

1) $\left(x^2-25\right)^2+\left(x^2+3x-10\right)^2=0$
2) $(x+3)^4-\left(x^2+x-6\right)^2=2\cdot(x-2)^4$
3) $(x-2)^2(x+1)^2-(x-2)\left(x^2-1\right)-2(x-1)^2=0$
4) (i)$\left(x^2-x-1\right)^3+\left(x^2-3x+2\right)^2=\left(2x^2-4x+1\right)^3$
5) (i, ii) $\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x.$
6) (i) $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$ и $x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$
7) (i) $x^4+4x-1=0$
8) $x^3+x+4\sqrt{3}=0$
9) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=1$
10) $x^4-2x^2-400x=9999$
11) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=0,1$
12) $x^4-2x^3-13x^2+14x-3=0$
13) $\left(x^2+x+1\right)^2=3\left(x^4+x^2+1\right)$
14) $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$
15) $\left(2x^3+x-3\right)^3=3-x^3$

§3. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Метод сложения и подстановки

3.1.1. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 7x + y = -8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = -18 \end{cases}$ (6 способов решения)

3) $\begin{cases} 2y + 3x = 0 \\ 6(x - 7) + 8y = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ \frac{x+2}{5} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$

3.1.2. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4 \\ 2x^2 - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 = 4y + 1 \\ x^2 + 3 = 4y + y^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2x + 3)^2 = 5y \\ (3x + 2)^2 = 5y \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x + 6y)^2 = 7y \\ (x + 6y)^2 = 7x \end{cases}$

5) (i) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$

3.1.3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y + xy = -11 \\ x - y - xy = 1 \end{cases}$

3.1.4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ z + t + x = -3 \\ y + z + t = 4 \\ t + x + y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \end{cases}$

3.2. Симметричные системы

3.2.1. Найдите значение выражения $x^5 + y^5$, если $xy = 1$ и $x + y = 3$

3.2.2. Решите системы уравнений:

1) (i) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$

2) (i) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160 \end{cases}$

3.2.3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$

2) (i) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

3.2.4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b^4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$

3.2.5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^5 + y^5 = 33 \end{cases}$$

3.2.6. (i) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

3.3. Другие методы решения

3.3.1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + yz = 5 \\ y + zx = 5 \\ z + xy = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = xyz \\ y + z = yzx \\ z + x = zxy \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 20 \\ x^4 + y^2 = 20 \end{cases}$

3.3.2. Сколько решений имеет система: $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$?

3.3.3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 210 \\ y^2 + xy = 231 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 108 \end{cases}$

3.3.4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 6 \\ yz = 12 \\ zx = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xyz = -6 \\ yzt = 6 \\ ztx = -12 \\ txy = 4 \end{cases}$

3) (i, ii, iii) $\begin{cases} xy + yz = 8 \\ zx + yz = 9 \\ zx + xy = 5 \end{cases}$

3.3.5. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 20 \\ x^2 - 4xy + 7y^2 = 13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$

§4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

4.1. Линейные неравенства и их системы

4.1.1. Решите неравенства:

1) (i, ii) $2x - 4 \geq 7x - 1$

2) $3\left(2x - \frac{1}{3}\right) + 8 \geq 6\left(x + \frac{5}{6}\right) - 1$

3) $-3 < \frac{5x+7}{4} < 2$

4.1.2. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x + 7 < 4x - 3 \\ x < 16 - x \end{cases}$

4.1.3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 5 - 2x \geq -1 \\ 4x - 4 \geq -2 \end{cases}$

4.1.4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x + 3 > 3x \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}$

4.2. Метод интервалов

Теория: Метод интервалов

4.2.1. Решите неравенства:

1) $(x+3)(x-2) > 0$

2) $(x+1)(8-x)(3x+2) \leq 0$

3) $\frac{2x-1}{x+3} < 0$

4) $x^3 + 4 \geq x^2 + 4x$

5) $(3x-7)^2 \geq (7x-3)^2$

6) $x^2\left(-x^2 - 9\right) \leq 9\left(-x^2 - 9\right)$

7) (i, ii) $\frac{-15}{(x+1)^2 - 3} \geq 0$

8) $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$

4.2.2. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x \\ (x-4)(x+8) < 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+2)^2 < 1 \\ (x-1)^2 > 4 \end{cases}$

4.3. Замена переменной

4.3.1. Решите неравенства:

1) $\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \leq -0,2$

2) $\left(x^2 + 2x\right)\left(x^2 + 2x - 3\right) \leq 40$

4.4. Сложные задачи

4.4.1. Решите систему неравенств для $x \geq 0$: $\begin{cases} x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 6 \leq 0 \\ x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x + 12 \geq 0 \end{cases}$

4.4.2. Решите неравенства:

1) $\frac{4x^2+20x+25}{x+1} + \frac{4x^2+20x+25}{x+3} \leq \frac{4x^2+20x+25}{x+2} + \frac{4x^2+20x+25}{x+4}$

2) $x^{18} - x^{13} + x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$

3) $x^8 - x^5 + x^2 + x + 1 > 0$

4) $x^4 \geq 4x - 3$

5) $x^4 - x^3 + 1 > 0$

§5. МОДУЛИ

5.1. Равносильные преобразования (схемы) для рациональных уравнений

Решите уравнения:

1) $|3x-2|=1$
2) $\left|x^2-3x\right|=0$
3) $|100x+4|=-1$
4) $\left|2x-x^2-3\right|=1$
5) $|19-x|+3=2\sqrt{2}$
6) $|x-2|=|x+5|$
7) $\left|x-x^2-1\right|=\left|2x-3+x^2\right|$
8) $\left|x^2-2x-1\right|=x-1$
9) $\left|x^2-1\right|+x+1=0$
10) $x^2=|2-3x|$.
11) (i, ii) $||x+1|-4|=3$
12) $|||x-5|-5|-5|=5$
13) $|8-|x-2||=7$
14) $||||x+1|+2|-1|+1|=2$
15) $||2x+3|-4|=x$
16) $x+|x|=0$.
17) $\sqrt{x^2}=-x$

5.2. Схемы для рациональных неравенств. Метод замены множителей.

5.2.1. Решите неравенства:

1) $|3x-2| \geq \left|x^2+3x+7\right|$
2) $|x+3| \leq 5$
3) $\left|x^3-1\right| \leq x^2+x+1$
4) $|3-|x-2|| \leq |x-7|$

Теория: Метод рационализации для модулей

5.2.2. Решите неравенства:

1) $|x+3|<|x-5|$
2) $x^2-|x|-2 \geq 0$
3) $\frac{1+x^8}{1-|x|} \leq 0$
4) $x\left(\left|x^2-1\right|-2|x-1|\right)<0$

5.3. Метод интервалов для уравнений

5.3.1. Решите уравнения:

1) $|8+x|+|x-7|=10$
2) $|x+1|+|5-x|=2$
3) $|x-1|+|x+2|-2x=1$
4) $|x-1|-|x|+|2x+3|=2x+4$

5) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$
6) $\left|x^2-4\right|+\left|9-x^2\right|=5$
7) $||2x-1|-5|+x=|6-x|$

5.4. Метод интервалов для неравенств

5.4.1. Решите уравнения:
1) $\frac{|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-2019|}{|2020-x|-1} \leq 0$
2) $3x-|x+6|-|3-x| \geq 0$
3) $\left|x^2-3\right|+2x+1 \geq 0$
4) $1<|2x-5| \leq 3$
5) $|x|^3+|x+1|^3=9$

5.5. Замена переменной

Решите неравенство:
1) $1-\frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$
2) (i) $(5-x)^2-|x-5|=30$

5.6. Системы с модулем

Решите систему уравнений:
1) $\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x-3|y|=1 \\ |x|+2y=4 \end{cases}$

5.7. Другое

1) Найдите наименьшее значение функции $y=2|x-3|+|3x-2|$.
2) Решите уравнение: $|1-x|+|x+2|=3$

§6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

6.1. Свойства корней

6.1.1 Найдите значение выражения: $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}$.

6.1.2 (i) Какое из чисел является иррациональным: $\sqrt{250}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{12\frac{1}{4}}$?

6.1.3 Вычислите: $(\sqrt{13}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{7})$

6.1.4 Найдите значение выражений: $\sqrt{65^2-56^2}$

6.1.5. Вычислите:

1) (i) $\sqrt{0,444...}$

2) Извлеките квадратный корень из числа: $\underbrace{44...4}_{2023}\underbrace{88...8}_{2022}9$

3) $\sqrt{2019\cdot 2021\cdot 2023\cdot 2025+16}$

4) $\sqrt{2022^2+2022\cdot 2023+2023^2}$

5) $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$

6.1.6. Вычислите:

1) $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$

2) $\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$

3) $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}\right)^{30}}{90}$

4) $\frac{\sqrt[28]{3}\cdot 3\cdot\sqrt[21]{3}}{\sqrt[12]{3}}$

6.1.7. Упростите: $\frac{\sqrt{16\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[10]{a}}$

6.1.8. Вычислить: $\left((\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27})^2+7\right)\cdot\left((\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27})^2-7\right)$

6.1.9. Упростите: $\frac{a-b}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$

6.2. Избавление от иррациональности

6.2.1. Является ли выражение: $\frac{22}{\sqrt{12}-1}-\frac{22}{2\sqrt{3}+1}$ целым числом?

6.2.2. Упростить: $\frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}-\sqrt{5}$

6.2.3. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

3) $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$

5) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}$

6.3. Полный квадрат под корнем

6.3.1. Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

2) (i) $\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$

3) $\sqrt{(2-\sqrt[3]{20})^2}-\sqrt{(3-\sqrt[3]{20})^2}$

6.3.2. Найдите значение выражения:

1) (i) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$
2) (i, ii) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$
3) $\sqrt{51-4\sqrt{77}}-\sqrt{47-4\sqrt{33}}$
4) $\sqrt{19-6\sqrt{2}}+\sqrt{67-42\sqrt{2}}$
5) $\sqrt{5,25-\sqrt{5}}$
6) $\sqrt[4]{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}+\sqrt{3}$
7) $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}$.

6.3.3. Найдите значение выражения: $\sqrt{(b-3)^2}+\sqrt{(b-13)^2}$ при $b\in(3;13)$

6.3.4. Упростите выражение: $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

6.3.5. Представить в виде суммы трёх радикалов: $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

6.3.6. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{25}+\sqrt{27}}$

6.4. Полный куб под корнем

Найдите значение выражений:
1) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$
2) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}-\sqrt{3}$
3) $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}$
4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
5) $\sqrt[3]{29\sqrt{2}-45}-\sqrt{2}$
6) (i) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$

6.5. Сравнение чисел

6.5.1 Расположите в порядке возрастания: $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $4\cdot\sqrt{\frac{1}{32}}$ и $\frac{1}{3}$

6.5.2. Сравните числа:
1) (i) $2\sqrt{10}$ и $6,(32)$
2) $\sqrt{52}+\sqrt{46}$ и 14
3) $\sqrt{2021}+\sqrt{2051}$ и $\sqrt{2031}+\sqrt{2041}$
4) $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}$ и 1
5) $\sqrt{11}$ и $5-\sqrt[3]{5}$
6) $\sqrt[300]{3}$ и $1{,}007$
7) (i, ii) $\sqrt[8]{8}$ и $\sqrt[9]{9}$
8) $\sqrt[5]{5!}$ и $\sqrt[6]{6!}$

6.6. Степень с рациональным показателем

Теория: Степени и корни.

6.6.1. Вычислите:
1) $5\cdot 25^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$;
2) $4\cdot\left(80+7^0\right)^{\frac{3}{4}}-32^{\frac{3}{5}}$.

6.6.2. Найдите наибольшее из чисел: $3^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{5}}$, $8^{\frac{1}{8}}$.

6.6.3. Найдите значение выражения: $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}$, если $b^{\frac{1}{2}}=3$.

6.6.4. Найдите утроенный результат произведения: $\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$ при $x=8$.

6.6.5. Сократите дробь: $\frac{a^{\frac{5}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}$.

6.6.6. Найдите $25^{\frac{5}{3}}f\left(25^{-3}\right)$, если $f\left(x\right)=\frac{\frac{1}{5}x^{\frac{5}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}-1}$.

6.7. Другие задачи

6.7.1. Найдите $f\left(3x+4\right)+f\left(4-3x\right)$, если $f\left(x\right)=\sqrt[5]{x-8}+\sqrt[5]{x}$

6.7.2. Найдите значение выражения: $\frac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-y$, если $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$

§7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Простейшие иррациональные уравнения

Решите уравнения:

7.1.1. (i) $\sqrt{3x-8}=5$

7.1.2. (i) $\sqrt{\frac{2x+5}{3}}=5$

7.1.3. (i) $\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}$

7.1.4. $\sqrt{48}-\sqrt{3}=\sqrt{x}$

7.1.5. (i) $\sqrt[3]{x-1}=4$

7.1.6. $\sqrt{27-\sqrt[3]{6+\sqrt[4]{x}}}=5$

Решите уравнения:

7.1.7. $\sqrt{x-3}=\sqrt{x-3}$

7.1.8. $\sqrt{x-5}=\sqrt{5-x}$

7.2. Равносильные преобразования (схемы)

Теория: Схемы для уравнений

Решите уравнения:

7.2.1. $\sqrt{-72-17x}=-x$

7.2.2. $\sqrt{-x}=x+6$

7.2.3. $\sqrt{6+5x}=x$

7.2.4. $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{-3x}$

7.2.5. $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$

7.2.6. $\sqrt{x^2}+x^3=0$

7.2.7. $\sqrt{-x}=x^4$

7.2.8. $\sqrt{-x}=x^3$

7.3. Переход к следствию

Решите уравнения:

7.3.1. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

7.3.2. $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8$

7.3.3. $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

7.3.4. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

7.3.5. $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$

7.3.6. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-3}=3$

7.3.7. $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$

7.4. Использование свойств функций

Оценка

7.4.1. $\sqrt[2021]{\frac{x+5}{8-x}}+\sqrt[2021]{\frac{8-x}{x+5}}=2$

7.4.2. $4\sqrt{x}=x^2-5x+13$

7.4.3. $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$

7.4.4. $\sqrt{x^7+1}+\sqrt{1-x^5}=8$

ОДЗ

7.4.5. $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$

7.4.6. $\sqrt{2022-x}=x-2022$

7.4.7. $\sqrt{4-x^2}-3\sqrt[4]{3x-6}=x^2-x-2$

7.4.8. $\sqrt{2-x-x^2}+1=\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}$

7.4.9. $\sqrt[3]{x}-\sqrt{2-x}=2$

Монотонность

7.4.10. $\sqrt{x+15}+\sqrt{x}=7-\sqrt{x+3}$

7.4.11. $3\sqrt{x^2-9}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}-4\sqrt{x^2-16}$

7.5. Использование замены

Решите уравнения:

7.5.1. $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$

7.5.2. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=2$

7.5.3. $\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\frac{1}{x}=5$

7.5.4. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$

7.5.5. $\sqrt[4]{17+x}+\sqrt[4]{17-x}=2$

7.5.6. $\sqrt{(x+3)^3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+6x+8}$

7.5.7. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

7.5.8. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=\sqrt[3]{3x-12}+2$

7.5.9. $\sqrt{2-\sqrt{x+2}}=x$

7.5.10. (i) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

7.5.11. $\left(\sqrt[3]{x}-4,5\right)^4+\left(\sqrt[3]{x}-5,5\right)^4=1$

7.5.12. $\sqrt[3]{x-1}=x-7$

7.5.13. $16\sqrt[3]{x-1}=x^3+8$

7.5.14. $\sqrt{5-x}=x^2-5$

7.5.15. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$

Разбиение и замена

7.5.16. $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$

Сопряжение

7.5.17. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$

7.5.18. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+2x+4}=2-x$

Однородность

7.5.19. $6x^2+7x\sqrt{x+1}=24\,(x+1)$

7.6. Системы иррациональных уравнений

Решите системы уравнений:

7.6.1. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1\\ x-y=3\end{cases}$

7.6.2. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ \sqrt{xy}=3\end{cases}$

7.6.3. $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2y-5x} = x \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2y-5x} = y \end{cases}$

7.6.4. $\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 26 \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 6 \end{cases}$

7.6.5. $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4 \end{cases}$

7.6.6. $\begin{cases} x - y = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$

7.6.7. Чему равно $x^2 + y^2$, если $\begin{cases} x + y = 25 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$?

7.6.8. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 34 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \frac{1}{\sqrt{xy}} \end{cases}$

7.6.9. $\begin{cases} |x| - \sqrt[3]{y+3} = 1 \\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2 - y = 10 \end{cases}$

7.6.10. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x} + y = 19 \end{cases}$

7.6.11. $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+5} = 2 \\ \sqrt{x+8} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$

7.7. Метод неопределённых коэффициентов

7.7.1. (i) $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$

§8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

8.1. Схемы для решения иррациональных неравенств

Теория: Схемы для неравенств с квадратными корнями

8.1.1. Решите неравенства:

1) $\sqrt{\frac{x+2}{x-4}} < 1$
2) $\sqrt{3x+1} \leq 1$
3) $\sqrt{2+x-x^2} > -2$
4) $\sqrt{\frac{x^2-x}{x+3}} > 1$
5) $\sqrt{x} \leq x-1$
6) $\sqrt{x^2-x-2} < x-1$
7) $\sqrt{x^2-3x-4} > x-2$
8) $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{5-x}$
9) $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$
10) $\frac{\sqrt{3x-2}}{x-4} < -1$
11) $\sqrt{x^2-5} + 3 > |x-1|$

8.2. Замена переменной и разложение на множители

Теория: Метод рационализации для корней

8.2.1. Решите неравенства:

1) $x - 3\sqrt{x} > 4$
2) $\sqrt{x+4,2} + \frac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \frac{5}{2}$
3) $x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3 \leq \frac{6}{2-\sqrt{x}}$
4) $(x-5)\sqrt{x+1} < 0$
5) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$

8.3. Иное

8.3.1 Решите неравенства:

1) $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+1}}{x^2-5x+6} > 0$
2) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35 - 2x$
3) $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x$
4) $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-2x} > \sqrt{3}$

§9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

9.1. Подготовительные задачи

9.1.1. Найдите значение выражения: $\frac{(a^{-2})^{-2}\cdot a^3}{a^5}$ при $a=-0,1$.

9.1.2. Найдите значение выражения: $27^{0,16}\cdot 81^{0,13}$.

9.1.3. Вычислите:

1) $\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$
2) $\frac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$
3) $7^{\frac{4}{9}}\cdot 49^{\frac{5}{18}}$
4) $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}:5^{-3,7}$
5) $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}$
6) (i) $\frac{225^n}{5^{2n+1}\cdot 3^{2n-1}}$
7) $\frac{7^{5n}\cdot 14^{2n}\cdot 9^{5n}\cdot 2401^n}{21^{10n-2}\cdot 28^n}$

9.2. Сравнение чисел

9.2.1. Сравните: 33^3, 3^{33} и 3^{3^3}

9.2.2. Что больше:

1) 3^{400} и 4^{300}
2) (i, ii) 33^{44} или 44^{33}
3) 111^{444} или 555^{333}
4) 3^{110} или 6^{65}
5) 1000^{2000} или 2000^{1000}
6) 80^{13} или 10^{27} ?

9.2.3. Сравните выражения:

1) $5^{10}+6^{10}$ или 7^{10}
2) $3^{100}+4^{100}$ или 5^{100}

9.2.4. Сравните:

1) (i) 31^{11} и 17^{14}
2) 127^{23} и 513^{18}
3) 2022^{1000} и 1000^{2022}

9.2.5. Сравните:

1) 100^{300} и $300!$
2) 200^{300} и $300!$

9.2.6. Сравните:

1) 9^{9999} и $3^{3^{3^3}}$
2) 4^{44444} и $2^{2^{2^{2^2}}}$
3) $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$

9.2.7. Сравните выражения:
1) $2^{3^{100}}$ и $3^{2^{150}}$
2) 2^{35} и 3^{24}

9.2.8. Сравните выражения:
1) $3^{\sqrt{3}}$ и $4^{\sqrt{2}}$
2) $3^{\sqrt{5}}$ и $5^{\sqrt{3}}$
3) $6^{\sqrt{7}}$ и $7^{\sqrt{6}}$

9.2.9. Сравните: 2^{π} и π^2

9.2.10. Сравните: $1,01^{100}$ и 2

9.3. Схемы для показательных уравнений

9.3.1. Решите уравнения:
1) а) $3^x = 27$ б) $2^x = \frac{1}{8}$ в) $2^x = 0,25$ г) $2^x = 3$
2) (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8} = 2^x$
3) (i) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$
4) (i, ii, iii) $16^{x-9} = \frac{1}{2}$
5) (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$
6) $2^{x^2} = 65536$
7) $3^x \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 24$
8) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$
9) $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$
10) $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$

9.3.2. Решите уравнение $9^{3x^2+4x} = 9^{\frac{11x+3}{x+1}}$ и найдите все его корни на отрезке $\left[\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[3]{4}+1\right); \frac{2\sqrt{30}}{11}\right]$

9.4. Замена переменной

9.4.1. Решите уравнения:
1) $3^x + 9^x + 27^x = 14$
2) $(0,1)^{x+1} + (0,01)^x = 0,02$

9.4.2. Решите уравнение $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$ и укажите корни, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$

9.4.3. Решите уравнение: $2 \cdot 9^{x^2-4x+1} + 42 \cdot 6^{x^2-4x} - 15 \cdot 4^{x^2-4x+1} = 0$ и найдите все его корни на отрезке $[-1; 3]$

9.4.4. Решите уравнение $8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$ и найдите все его корни на отрезке $[\log_2 5; \log_2 11]$

9.4.5. Решите уравнение: $8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0$

9.4.6. Решите уравнение $(4^x - 8)^2 - 10\left|4^x - 8\right| = 3 \cdot 4^x - 36$ и найдите все его корни на отрезке $[2; 3]$

9.4.7. Решите уравнение $36^{\sqrt{3x^2+5x+7}-3} = 3^{\sqrt{3x^2+5x+7}-3} \cdot 2^{4\sqrt{3x^2+5x+7}-12}$ и найдите все его корни на отрезке $\left[\log_7 \frac{1}{36}; \log_{216} 7\right]$

9.4.8. Решите уравнение: (i) $6^x + 4^x = 9^x$

9.4.9. Решите уравнение: $3^x - 2^x = \sqrt{6^x}$

9.4.10. Решите уравнение: $45^x + 125^x = 2 \cdot 27^x$

9.4.11. Решите уравнение: $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6$

9.4.12. Решите уравнение: $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$

9.4.13. Решите уравнение: $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$

9.4.14. Решите уравнение: $(26+15\sqrt{3})^x - 3(7+4\sqrt{3})^x - 2(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 3$

9.5. Свойства функций

9.5.1. Решите уравнения:

1) (i, ii) $7^x + 24^x = 25^x$
2) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x = 34$
4) $6^x - 2^x = 32$
5) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$
6) $2^x = 3x - 1$
7) $3^{x^2+1} + 5^{x^4} = 4 - tg^2 x$
8) $10^x = 11^{3-x}$
9) $(3x)^x = 3^{3^3}$
10) $2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4$

9.6. Системы уравнений

9.6.1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} y^x = xy \\ y^2 = x^3 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 9^x \cdot 7^{2y} = 27 \\ 5^y \cdot 4^{x+1} = 32 \end{cases}$

9.7. Другое

9.7.1. Решите уравнения (переменное основание):

1) $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} - \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}} = 0.$
2) $\sqrt{x^{\frac{1}{x}}} = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
3) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$
4) Решите уравнение: $x^{x^2+3} = x^{x+9}$
5) $x^{2x} = 1$
6) $\left(x^2 - 7x + 11\right)^{x^2-13x+42} = 1$

9.7.2. Решите уравнения (логарифмирование):

1) $3^{x^2+4x} = \frac{1}{25}$

2) $2^{x^{3^2}} = 3^{x^{2^3}}$

3) $10^{x^2} = 2 \cdot 100^x$

4) $5^{x^2-8x+15} = 3^{x-3}$

5) $5^x \cdot 16^{\frac{x-1}{x}} = 100$

6) $5^{3\lg x} = 12,5x$

7) $5^{7^x} = 7^{5^x}$

8) $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}$

§10. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

10.1. Равносильные преобразования (схемы)

Теория: Решение показательных уравнений и неравенств

10.1.1. Решите неравенства:

1) $2^x < 3$

2) $\left(\sqrt{3}+2\right)^x > 7-4\sqrt{3}$

3) $\left(1+\sqrt{2}\right)^x > 3-2\sqrt{2}$

10.1.2. Решите неравенства:

1) $3^x \cdot 25^{\frac{1}{x}} \geq 45$

2) $0,2^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{2x} \cdot 25x^{-2} \geq \frac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^x}{5x^2}$

3) $\frac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 40^x}{16x^2} \leq 0,5^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 10^x \cdot x^{-2}$

10.2. Метод замены множителей. Простая замена переменной.

Теория: Метод рационализации для степеней

10.2.1. Решите неравенства:

1) $\frac{4^{x^2+2x-2}-0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \leq 0$

2) $\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5} + \frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9} \leq 3^x+5$

3) $\frac{4^x-2}{1-3x} > 0$

4) $\frac{1}{5^x+31} \leq \frac{4}{5^{x+1}-1}$

5) $\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4}$

6) $\frac{3^x-1}{3^x-3} \leq 1+\frac{1}{3^x-2}$

7) $\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27} \geq 0,5$

8) $2^x+2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

10.3. Сложная замена переменной

10.3.1. Решите неравенства:

1) $\left(9^x-2\cdot 3^x\right)^2 - 62\left(9^x-2\cdot 3^x\right) - 63 \geq 0$

2) $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$

3) $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$

4) $\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$

5) $\frac{9^x+4^x}{6^x-9^x} \geq 5$

10.4. Другие методы решения

10.4.1. Решите неравенства:

1) $15^x - 6\cdot 3^x \leq 3\left(3^x-15\right) + 5^{x+1}$

2) $1^{x+1} \leq 1^x$

3) $\left(x^2-x+1\right)^x < 1$

4) $25^{x+1} \geq 10\cdot 32^{|x-1|+1}$

5) $3^x \geq 2^{x^2}$

6) $\sqrt[x-1]{10} \geq 2$
7) $2^x \cdot 49^{\frac{1}{x}} \geq 28$
8) $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3$
9) $x \cdot 3^x < 18$
10) $8x^3 \cdot 3^x > \sqrt{3}$
11) $3^n + 4^n < 5^n$, для всех натуральных $n \geq 3$
12) $2^x + 3^x + 4^x < 3$
13) $3^{\ln\left(x^2-5x\right)} \leq (5-x)^{\ln 3}$
14) $f\left(g\left(x\right)\right) < g\left(f\left(x\right)\right)$ $f\left(x\right) = 2^x$ $g\left(x\right) = 4^x$

§11. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

11.1. Теория

Коротко о формулах для логарифмов

Логарифм и его свойства

Хитрая формула для логарифма

11.2. Вычисление

11.2.1. Вычислите:

1) $3^{\log_3 +2}$

2) $11^{-2\log_{11} 2}$

3) $\log_2 240 - \log_2 3,75$

4) $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2$

5) $\frac{\log_2 27}{\log_2 144 - \log_2 16}$

6) $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$

11.2.2. Зная, что $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$, найдите $\log_{175} 56$

11.2.3. Найдите $\log_6 16$, если известно, что $\log_{12} 27 = b$

11.2.4. Упростите выражение: $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$

11.2.5. Вычислить: $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$

11.2.6. Вычислить: $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

11.2.7. Найти значение выражения: $5^{\frac{\lg \lg 5}{\lg 5}} - \lg 0,05$

11.3. Сравнение

11.3.1. Сравните: $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 13$

11.3.2. Что больше: $\log_3 29$ или $\log_4 61$

11.3.3. Что больше: $\log_3 36$ или $\log_2 12$

11.3.4. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_5 8$

11.3.5. Докажите неравенство: $1,5 < \log_2 3 < 1,6$

11.3.6. Найдите знак выражения: $\log_{1,7} \left(\frac{1}{2}\left(1 - \log_7 3\right)\right)$

§12. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

12.1. Простые схемы решения

Теория: Решение логарифмических уравнений и неравенств

12.1.1. Решите уравнения:

1) (i) $\log_5(5-x)=\log_5 3$

2) $\log_5(5-x)=2\cdot\log_5 3$

3) $\log_2 x=3$

4) (i, ii, iii) $\log_5(4+x)=2$

5) $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$

6) $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$

7) $\log_5\left(x^2+2x\right)=\log_5\left(x^2+10\right)$

8) $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$

9) $\log_8 2^{8x-4}=4$

10) $3^{\log_9(5x-5)}=5$

11) $\log_{x-5}49=2$

12) $\log_4(\log_3(\log_2 x))=\frac{1}{2}$

12.2. Другие методы

12.2.1. Решите уравнения:

1) $x^{\lg x}=1000x^2$

2) $\log_2 x+\log_3 x=1$

3) $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$

4) $\log_5 x=\log_x 5$

5) $\log_2\log_2 x=\log_4\log_4 2x$

6) $\left|1-\log_{\frac{1}{6}}x\right|+2=\left|3-\log_{\frac{1}{6}}x\right|$

7) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0,0001$

8) $x=20\cdot(0,75)^{\log_x 15}$

9) $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$

10) $2\cdot 4^{\lg x}+5\cdot 25^{\lg x}=7x$

11) $x^{\log_3(3x)}=729$

12) $\sqrt{\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}$

13) $\log_{\frac{1}{5}}(x-1)+\frac{7}{x+1}=\log_3(x-3)-\frac{6}{x}$

12.3. Отбор корней

12.3.1. Решите уравнение $\log_{25}\left(x^3-8x+8\right)=\log_5|x-2|$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\log_7 3;\sqrt{7}\right]$

12.3.2. Решите уравнение $\log_3\left(\log_{36}\left(\log^2_{216}\left(x+\frac{4}{x}\right)+\frac{1}{18}\right)+\frac{7}{2}\right)=1$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $[\log_{126}24;5]$

12.4. Системы уравнений

12.4.1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^y = 4^6 \\ y = 1 + \log_4 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2 \\ y + 4 \lg x = 28 \end{cases}$

§13. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

13.1. Равносильные преобразования (схемы) для простых неравенств

13.1.1. Решите неравенства:

1) $\log_2 x \le 3$
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1$
3) $\log_4(6-6x) < \log_4\left(x^2-5x+4\right) + \log_4(x+3)$
4) $\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \ge 3$
5) $\log_7\frac{3}{x} + \log_7\left(x^2-7x+11\right) \le \log_7\left(x^2-7x+\frac{3}{x}+10\right)$
6) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^{\log_{.x}\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)} \le \sqrt{8}+\sqrt{7}$

13.2. Равносильные преобразования (схемы) для более сложных неравенств

13.2.1. Решите неравенства:

1) $\log_7\frac{3}{x} + \log_7\left(x^2-7x+11\right) \le \log_7\left(x^2-7x+\frac{3}{x}+10\right)$
2) $2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} \le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$
3) $\log^2_{|x|}\left(x^2\right) + \log_2\left(x^2\right) \le 8$
4) $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$

13.3. Метод замены множителей

Теория: Метод рационализации при решении логарифмических неравенств1, Метод рационализации при решении логарифмических неравенств

13.3.1. Решите неравенства:

1) $\frac{\log_3(3x+2)}{\log_5(2x+3)} \le 0$
2) $\log^2_{0,1} x - 1 \le 0$
3) $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right) > 0$
4) $\log_{\log_x 2x}(9x-4) \ge 0$
5) $\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^4} \ge -4$

13.4. Замена переменной и метод замены множителей

13.4.1. Решите неравенства:

1) $\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x-5} + \frac{\log_2 x-5}{\log_2(32x)} \ge \frac{\log_2 x^{16}+18}{\log_2^2 x-25}$
2) $\log^2_2\left(4+3x-x^2\right) + 7\log_{0,5}\left(4+3x-x^2\right) + 10 > 0$
3) $\log^2_2\left(25-x^2\right) - 7\log_2\left(25-x^2\right) + 12 \ge 0$
4) $\log^2_5\left(25-x^2\right) - 3\log_5\left(25-x^2\right) + 2 \ge 0$
5) $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$
6) $\left(\log^2_2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log^2_2 x$
7) $\log_4\frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{x}} 8 \le 3,5$ 8)8 (+). $\log^2_2(-\log_3 x) + \log_2\log^2_3 x \le 8$
9) $\log_{x^2+1}(x-3)^2\cdot\log_{x^2+1}\frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \le -2$
10) $\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right) - \frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2 \ge 2$
11) $\lg^2(-x) - \lg\left(x^2\right) > 3$

13.5. Закрепление метода замены множителей

13.5.1. Решите неравенства:

1) $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(2x^2-3x\right) \geq \log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(17x-20-3x^2\right)$
2) $\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right) \leq 0$
3) $\left(1-\frac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4 \leq 1$
4) $(7x-10)\log_{4x-3}\left(x^2-4x+9\right) \geq 0$
5) $(5x-13)\cdot\log_{2x-5}\left(x^2-6x+10\right) \geq 0$
6) $\log_2(x-6)\cdot\log_2(14-x) \geq 4$
7) $\frac{\log_3(27x)\cdot\log_2(7x)}{|x|-x^2} \geq 0$
8) $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leq 0$
9) $\log_{813}\left(x^2-4x+3\right)\cdot\log_{\frac{2x+3}{3x}}813 \leq \log_{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}\left(x^2-2x-8\right)$
10) $\log_{1-\log_3 x}\left(1+\log_x^2 3\right) \leq 1$

13.6. Другие методы решения

13.6.1. Решите неравенства:

1) $x\cdot 2^{\log_x 3} \leq 6$
2) $\log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right) \leq x$
3) (i) $\frac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x} \leq \log_{25}9$
4) $(\log_2 x)\sqrt{\log_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} \leq 1$
5) $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x} \leq \log_5(2x+3)^3\cdot\log_5 x$
6) $x^2\log_5^2 x+5\log_4^2 x \leq x\log_5 x\cdot\log_4 x^6$
7) (i) $\log_2(x-5)+\log_3 x \leq 4$
8) $\log_2(x-1)+\log_2\left(x^2+\frac{1}{x-1}\right) \leq 2\log_2\left(\frac{x^2+x+1}{2}\right)$
9) $\log_5^2(x-8)-6\log_5\left(\sqrt{x-8}\right) \geq 4-25(x-8)\cdot(\log_5(x-8)-4)$
10) $\log_x(\log_9(3^x-9)) < 1$

13.7. Системы неравенств

13.7.1. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases}\log_7^2\left(x^2+4x-20\right) \leq x-3\\ \log_7^2\left(x^2+2x-14\right) \leq 3-x\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_{5x}x^2+\log_{x^2}5x \leq 2\\ \log_{x-3}^4\left(x^2-17\right)+\log_{x^2-17}^2(x-3)-\log_{5x}25 > 79\end{cases}$

§14. КОМБИНИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

14.1. Уравнения и неравенства

14.1.1. Решите неравенства:

1) $\frac{81^x+2\cdot 25^{x\log_5 3}-5}{(4x-1)^2} \geq 0$

2) $\frac{\log_5\left(5^x-2\cdot 5^{-x}-6\right)+2x}{x+1} \geq 1$

3) $\frac{\sqrt{\log^2_{0,5} x-81}+2}{\log_{0,5} x-1} < 1$

4) $4x+8\sqrt{2-x^2} > 4+\left(x^2-x\right)\cdot 2^x+2^{x+1}\cdot x\sqrt{2-x^2}$

5) $\sqrt{x+1}-1 \leq -x\cdot|x-2|-4x$

6) $\left|x-4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \leq \frac{5}{3}\cdot x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$

7) $\frac{\sqrt{\log^2_{0,5} x-81}+2}{\log_{0,5} x-1} < 1$

8) Решите неравенство: $\sqrt{36^x-3\cdot 6^{x+1}+81}+6^x \leq 9-\sqrt{16^x-9\cdot 4^x+18}$

9) $\frac{\log_2(|x|)\cdot\log_2\left(\frac{|x|-1}{16}\right)+3}{\sqrt{\log_2(7-|x+4|)}} \geq 0$

10) $\log_{0,5}\frac{4^{|x|+1}-4\cdot 2^{|x|+1}+5}{\left(2^{\sqrt{x}+3}-2\right)^2+1}+\frac{1}{2\cdot 2^{|x|}-1} > \left(8\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)^{-1}$

14.1.2. Найдите все корни уравнения $\sin\left(2^x\right)=1$, удовлетворяющие неравенству $|2^x-1|+|2^x-8| \leq 7$

14.1.3. Решите уравнение $2\cdot 16^{\cos x}+4^{\cos x}-1=0$ и найдите наименьший положительный корень этого уравнения.

14.1.4. Решите уравнение: $\log^2_2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0$

14.1.5. Решите уравнение: $|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$

14.1.6. Найдите увеличенную в 3 раза сумму квадратов корней уравнения

$$\sqrt[5]{5^{2x^2+3x-5}}-\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}+1\right)^{2x}=0$$

14.2. Системы неравенств

14.2.1. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2+6^x+4 \leq 44\cdot\log_5(x+3) \\ 4x+6^x \geq 44\cdot\log_5(x+3) \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4^{x+1}-17\cdot 2^x+4 \leq 0 \\ \log^2_{|x|}\left(x^2\right)+\log_2\left(x^2\right) \leq 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_7\left(x^2-9\right) \leq 1 \\ \frac{2x^2+x-28}{6^{x-6}+5^{x-5}-4} \leq 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x+3\cdot 2^{-x} \leq 4 \\ \frac{2x^2-8x}{x-7} \leq x \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{2x^2-10x+6}{x-5} \leq x \\ 1+\log_6(4-x) \leq \log_6\left(16-x^2\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} 9^{x-3}-9^{x-2}+9^{x-1} > 511 \\ \log_7\frac{3}{x}+\log_7\left(x^2-7x+11\right) \leq \log_7\left(x^2-7x+\frac{3}{x}+10\right) \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x) \leq 0 \\ 64^{x^2-3x+20}-0,125^{2x^2-6x-200} \leq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2^{x^2+|x|} \cdot 3^{-|x|} \leq 1 \\ |x-1| \leq \frac{9x^2}{2} + 2,5x \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0 \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4\log_9(x+4,5) - 1 \geq 3^{4x^2-9} \\ 3 - 4\log_9(x+4,5) \geq 3^{9-4x^2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2\cdot(10-x^2)}{x}} \leq 2x+5 \\ \sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)} + 1 > \log_3\left(3x^2-4x+2\right) \end{cases}$

12) $\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22 \\ \log_3\left(x^2-x-2\right) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2^x + 16 \cdot 2^{-x} \geq 17 \\ 2 \cdot \log_9\left(4x^2+1\right) \leq \log_3\left(3x^2+4x+1\right) \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4^x - 2^{x+8} \leq 257 \\ 2 \cdot \log_{x+7}\left(\frac{x^2-x-56}{x}\right)^2 + \log_{x+7}\frac{x-8}{x} \leq 9 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \geq 0 \\ 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 \geq 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \frac{3\cdot 64^x + 2^x - 70}{64^x - 2} \geq 3 \\ \log_3^2(x+3) - 3\log_3(x+3) + 2 \leq 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 17\log_{17}(x+14) \geq x^2+8 \\ 17\log_{17}(x+14) \leq 6x-1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2 + 2^x + 36 \leq 68 \cdot \log_3(x+3) \\ 12x + 2^x \geq 68 \cdot \log_3(x+3) \end{cases}$

§15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

15.1. Арифметическая прогрессия

Теория: Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го (общего) члена арифметической прогрессии.

15.1.1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 4$. Найдите a_{10}.

15.1.2. Дана арифметическая прогрессия 14, 9, 4, ... Какое число стоит в этой последовательности на 81 месте?

15.1.3. Дана арифметическая прогрессия $-21;\ -18;\ \ldots$. Определите, под каким числом в эту прогрессию входит число 0.

15.1.4. Найдите номер члена арифметической прогрессии (a_n) равного 47, если $a_4 = -3;\ d = 5$

15.1.5. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = 23,\ \ a_{11} = 48$

15.1.6. В арифметической прогрессии двенадцатый член равен -21, а двадцать третий равен 1. Найдите разность этой прогрессии.

15.1.7. Найдите сумму натуральных чисел, не превосходящих 30.

15.1.8. Найдите сумму всех двузначных чисел.

15.1.9. Дана арифметическая прогрессия (a_n), где $a_n = 2n + 1$. Найдите сумму её членов с 11-го по 20-й включительно.

15.1.10. Между числами $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{6}$вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами составили арифметическую прогрессию.

15.1.11. Найдите значения x, при которых числа $x - 1;\ 4x - 3$ и $x^2 + 1$ составляют арифметическую прогрессию.

15.1.12. Среднее арифметическое первых десяти членов арифметической прогрессии равно 19. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии, если известно, что они являются натуральными числами.

15.1.13. В арифметической прогрессии (x_n), $x_{13} = 10$. Найдите S_{25}.

15.1.14. Бригада изготовила в январе 62 детали, а в каждый следующий месяц изготовляла на 14 деталей больше, чем предыдущий. Сколько деталей изготовила бригада в ноябре?

15.1.15. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

15.1.16. Решите уравнения:

1) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = (0,04)^{-28}$

2) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-3}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}$

15.2. Геометрическая прогрессия

Теория: Определение и вывод основных формул геометрической прогрессии.

15.2.1. Дана геометрическая прогрессия (b_n), для которой $b_4 = -7,\ \ b_7 = 2401$. Найти знаменатель прогрессии.

15.2.2. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: $\ldots;\ 1,5;\ x;\ 24;\ -96;\ldots$ Найдите x.

15.2.3. Дана геометрическая прогрессия (b_n), знаменатель которой равен 4, $b_1 = \frac{3}{4}$. Найти сумму первых четырёх её членов.

15.2.4. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -5,\ \ b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

15.2.5. Найдите суммы геометрических прогрессий:

1) $\frac{3}{\pi} + \frac{9}{\pi^2} + \frac{27}{\pi^3} + ...$

2) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{6} + ...$

15.3. Комбинирование арифметической и геометрической

15.3.1. Все члены геометрической прогрессии (b_n) различны. Между b_2 и b_3 можно вставить число X так, что числа b_1,b_2 , X и b_3 составляют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

15.4. Суммирование

15.4.1. Найдите значение выражений:

1) $3\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)\left(2^{32}+1\right)$

2) $2^{20} - 2^{19} - 2^{18} - 2^{17} - 2^{16} - ... - 2 - 1$

3) $\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)$

15.4.2. Вычислите:

1) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... + 99^2 - 100^2$

2) (i, ii) $1 + 11 + 111 + \ ... + \underbrace{11...1}_{n}$

15.4.3. Найдите значение суммы:

1) (i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

3) $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$

4) $1^3 + 5^3 + 9^3 + ... + (4n+1)^3$

5) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$

6) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!}$

7) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)\,x^n$

8) $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n$

9) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + ... + (n+1)\,n^2$

10) $1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + ... + 100 \cdot 5^{99}$

11) $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

12) $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{99\cdot101}+\frac{1}{101\cdot103}$
13) $1+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+...$

15.4.4. Просуммируйте дроби:

1) $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{100}{98!+99!+100!}$.

2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{167}+\sqrt{169}}$

15.4.5. Докажите неравенство: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{121}}>11$

15.5. Другое

15.5.1. Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1=1$ и $a_{n+1}=\frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}}$. Найдите формулу для a_n.

§16. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

16.1. Движение

Движение по прямой

16.1.1. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 56 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 48 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

16.1.2. (i) Первую половину пути, автомобиль проехал со скоростью 42 км/ч, а вторую — со скоростью 48 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

16.1.3. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжаем мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите скорость поезда в метрах.

16.1.4. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

16.1.5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через два часа из A выехал велосипедист, а еще через полчаса - мотоциклист. Все трое двигались с постоянными скоростями. Мотоциклист обогнал в пути пешехода и велосипедиста и через некоторое время сделал остановку в пункте C. Пешеход и велосипедист одновременно достигли пункта C на 3 минуты позже мотоциклиста и сразу после этого все трое продолжили движение. На сколько времени (в часах) раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл туда на 1 час позже мотоциклиста?

16.1.6. Велосипедист выехал со постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км/ч. На следующий день он отравился обратно в A со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

16.1.7. Расстояние между городами A и B равно 790 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 450 км от города A.

16.1.8. Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 22 км/ч. Через час после него со скоростью 12 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час – третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 8 часов после этого догнал первого.

16.1.9. Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 51 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью на 34 км/ч больше скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста.

16.1.10. Расстояние между городами A и B равно 80 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 20 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из С в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С.

Движение по реке

16.1.11. Катер прошёл от одной пристани до другой, расстояние между которыми по реке равно 48 км, сделал стоянку на 20 мин и вернулся обратно через 16/3 ч после начала поездки. Найдите скорость течения реки, если известно, что скорость катера в стоячей воде равна 20 км/ч.

16.1.12. Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

16.1.13. От турбазы до озера 8 км. Сначала дорога идет в гору, потом лесом, потом под гору. До озера туристы шли 1 ч 27 мин, а обратно 1 ч 51 мин. Скорость их в гору была 4 км/ч, лесом 5 км/ч, а под гору 6 км/ч.

16.1.14. Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

16.1.15. Григорий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вниз по реке до пункта В, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Григорий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись шесть километров, Григорий заметил на берегу машущего ему рукой Василия, который просил но старой дружбе довезти его до пункта С. И хоть пункт С Григорий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Григорий с Василием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Григория, откуда те крикнули, что им до пункта В осталось четверть пути и чтобы Григорий нигде не задерживался. Доставив Василия в пункт С, Григорий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и С, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, скорости катеров постоянны, а Григорий, действительно, нигде не задерживался.

Круговая трасса

16.1.16. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 8 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 3 минуты назад. Найдите скорость первого бегуна; если известно, что она на 9 км/ч меньше скорости второго.

16.2. Работа и производительность

16.2.1. Первая труба заполняет бассейн за 7 часов, а две трубы вместе – за 5 часов 50 минут. За сколько часов заполняет бассейн одна вторая труба?

16.2.2. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий – за 15 минут, а первый и третий – за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

16.2.3. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 100литров она заполняет на 6 мин дольше, чем вторая труба?

16.2.4. Дима и Саша выполняют одинаковый тест. Дима отвечает за час на 12 вопросов теста, а Саша — на 22. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Дима закончил свой тест позже Саши на 75 минут. Сколько вопросов содержит тест?

16.2.5. На изготовление 588 деталей первый рабочий затрачивает на 7 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 672 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий

16.2.6. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 4 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

16.2.7. Три бригады изготовили вместе 173 детали. Известно, что вторая бригада изготовила деталей в 3 раза больше, чем первая и на 12 деталей меньше, чем третья. На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая.

16.3. Смеси, сплавы и растворы

16.3.1. (i) Свежие фрукты содержат 79% воды, а высушенные — 16%. Сколько сухих фруктов получится из 288 кг свежих фруктов?

16.3.2. Виноград содержит 90% влаги, а изюм - 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

16.3.3. Смешав 70%-й и 60% растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90% раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси.

16.3.4. Имеется два сосуда. Первый содержит 75 кг, а второй - 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 42% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

16.3.5. Смешав 43-процентный и 89-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 69-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 73-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 43-процентного раствора использовали для получения смеси?

16.3.6. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 81% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

16.3.7. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй - 25% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Соединив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся сплаве?

16.4. Проценты. Банковский процент.

16.4.1. Стоимость покупки с учетом 3%-ной скидки по дисконтной карте составила 873 рубля. Сколько рублей пришлось бы заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?

16.4.2. Четыре рубашки дешевле куртки на 20%. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

16.4.3. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

16.4.4. Задачу №1 правильно решили 17955 человек, что составляет 63% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

16.4.4. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

16.4.5. М.В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%.

16.4.6. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

16.5. Арифметические задачи. Задачи на оптимизацию.

16.5.1. На пост председателя школьного совета претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 104 человека. Голоса между кандидатами распределились в отношении 5:8. Сколько голосов получил победитель?

16.5.2. В некоторой стране решили провести всенародные выборы правительства. Две трети избирателей в этой стране – городские жители, а одна треть – сельские. Президент должен предложить на утверждение проект состава правительства из 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов городских (сельских) жителей, сколько человек из города (села) в предложенном проекте. Какое наименьшее число городских жителей надо включить в проект состава правительства, чтобы за него проголосовало более половины избирателей?

16.5.3. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций: 1) за 5 золотых монет получить 6 серебряных и одну медную; 2) за 8 серебряных монет получить 6 золотых и одну медную. У Николая были только серебряные монеты. После обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 55 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

§17. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

17.1. Кредиты

17.1.1. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3 512 320 рублей . Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

17.1.2. 31 декабря 2014 года Фёдор взял в банке 6 951 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Фёдор переводит в банк платёж. Весь долг Фёдор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

17.1.3. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%) затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

17.1.4. 31 декабря 2017 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

17.1.5. 1 января 2015 года Андрей Владимирович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Андрей Владимирович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

17.1.6. 31 декабря 2014 года Борис взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Борис переводит очередной транш. Борис выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 560 тыс. рублей, во второй - 644,1 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Борису?

17.1.7. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на %), затем Евгений переводит в банк очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, а во второй 649,6 тыс. рублей. Найдите.

17.1.8. Мария Константиновна взяла кредит в банке на срок 8 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Марией Константиновной. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

15.2 Вклады, сбережения и депозиты

17.2.1. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

17.2.2. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

15.3 Равномерное погашение долга и кредита

17.3.1. Максим хочет взять в кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

17.3.2. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.
Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

17.3.3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн рублей?

17.3.4. Жанна взяла в банке кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернет банку в течение первого года кредитования?

17.3.5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

17.3.6. 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы: – 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2 по 14–е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

17.3.7. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

17.3.8. В июле планируется взять кредит в банке на срок 15 лет. Условия его возврата таковы: – каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. Найдите x если известно, что за весь период выплатили на 15% больше, чем взяли в кредит.

17.3.9. 15-го января планируется взять кредит на 15 месяцев. Условия платежа таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2 по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что восьмая выплата составила 108 тыс. рублей.
Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

17.3.10. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
– 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен уменьшаться на 40 тыс. руб.;
– за двадцать первый месяц долг должен быть погашен полностью.
Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 1852 тыс. рублей?

17.2. Другие способы выплат

17.4.1. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 миллионов рублей.

17.4.2. Фермер взял в банке кредит на сумму 3 640 000 рублей под 20% годовых. Схема погашения кредита: раз в год клиент должен выплачивать банку одну и ту же сумму, которая состоит из двух частей. Первая часть составляет 20% от оставшейся суммы долга, а вторая часть направлена на погашение оставшейся суммы долга. Каждый следующий год проценты начисляются только на оставшуюся сумму долга. Какой должна быть ежегодная сумма выплаты (в рублях), чтобы фермер полностью погасил кредит тремя равными платежами?

17.4.3. В июле 2019 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2020, 2021 и 2022 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.;
— суммы выплат 2023 и 2024 годов равны.
Найдите r, если в 2024 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.

17.4.4. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.
Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

17.4.5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

17.3. Производительность и оптимизация

17.5.1. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей A или 5 деталей B. На втором комбинате работает 160 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей A или 15 деталей B. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужно 2 детали A и 1 деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

17.4. Функция прибыли

17.6.1. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+x+7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

17.6.2. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - \big(0,5x^2 + x + 9\big)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

17.6.3. Зависимость объема Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

17.6.4. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 13000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17.6.5. В родном городе Аристарха Луков-Арбалетова количество людей, пользующихся железной дорогой, постоянно. Из этих людей свой проезд оплачивают 10%, а ещё 10% выплатой штрафов за безбилетный проезд доводят получаемую РЖД (руководством железной дороги) прибыль до 100% от ожидаемой. Поскупившись платить контролёрам, взимавшим штрафы, РЖД ограничило вход на все станции турникетами, стоимость установки которых составила 100% от годовой прибыли. Цена проезда выросла на 50%, поскольку РЖД планировало окупить турникеты за 2 года, а контролёры были уволены. Однако 10% пассажиров возмутились проявленным со стороны РЖД недоверием и повышением цен на билеты и перестали пользоваться железной дорогой. Остальные 90% пассажиров продолжили ездить, и в первый месяц все они оплачивали свой проезд. На второй месяц в кассы РЖД не попали деньги ещё 10% от первоначального числа клиентов, так как их физическая подготовка оказалась достаточной для беспрепятственного преодоления турникетов. А в связи с появлением дырок в заборах около станций с каждым последующим месяцем этот процент стал увеличиваться на 2 и рос бы до тех пор, пока все бывшие зайцы не нашли бы способ ездить в обход турникетов. Поэтому каждые полгода с момента установки турникетов РЖД тратит 15% ожидаемой месячной прибыли на ремонт заборов, из-за чего процент зайцев вновь возвращается к 10 от первоначального числа всех пользователей железной дороги, и затем ситуация с двухпроцентным приростом зайцев повторяется. За какой срок окупится и окупится ли установка турникетов, если срок их работы - 10 лет, а контролёров РЖД так и не наймёт?

17.6.6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

17.6.7. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t \quad (t = 1; 2; ...)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 25%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

17.6.8. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t \quad (t = 1; 2; ...)$ В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $(1 + r)$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

17.6.9. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $(90 + 0,4v^2)$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

§18. ТРИГОНОМЕТРИЯ

18.1. Теория

§19. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

19.1. Значения простых тригонометрических выражений.

19.1.1. Найдите числовое значение выражения: $2\sin\frac{\pi}{6}+2\cos 0-3\sin 0+2\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}-2\cos\pi-ctg^2\frac{\pi}{6}-3tg\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}-2\cos^2\frac{\pi}{6}$

19.1.2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3}(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}$ при $\alpha=-\frac{7\pi}{3}$

19.1.3. Вычислите:

а) $2\cos 30^\circ ctg60^\circ-\sin\frac{3\pi}{2}$

б) $\frac{\sin 390^\circ-\sin(-390^\circ)}{tg(-765^\circ)}$

19.1.4. Найдите значение выражения: $\sin 10+|\sin 10|$.

19.1.5. Сравните: $\sin 2\cos 3\sin 5$ и 0

19.2. Выражение тригонометрических функций

19.2.1. (i, ii) Существуют ли числа α, β, γ, для которых:

$\sin\alpha=-\frac{3}{2}$;

$\cos\beta=-0,97$;

$tg\gamma=0,9$;

$\sin\alpha=\frac{5}{7}$;

$\cos\beta=\sqrt{3,1}$;

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{11}}{3}$;

$\cos\beta=\sqrt{1,7}$;

$tg\gamma=-7,3$?

19.2.2. (i) Найдите значения $\cos x$, tgx, $ctgx$, если $\sin\alpha=-0,6$; $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

19.2.3. Найдите значения $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=0,6$; и $\pi<\alpha<2\pi$

19.2.4. Найдите $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, если известно, что $25\cos^2\alpha-5\cos\alpha-12=0$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

19.2.5. Найдите максимум выражения $3\sin^2 x+2\cos^2 x$.

19.3. Формулы двойного и половинного угла

19.3.1. Найдите значение выражений:

1) (i, ii) $\sqrt{50}-\sqrt{200}\cos^2\frac{5\pi}{8}$

2) $5\sqrt{3}-10\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

3) $\frac{4\sin 17^\circ\cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$

19.3.2. Найдите значение выражения $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $ctg\frac{\alpha}{2}=m$.

19.4. Упрощение выражений

19.4.1. Упростите выражения:

а) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha-\frac{3\sin^2\alpha-3}{1+ctg^2\alpha}$

б) $tg^6\alpha-\frac{\sin^2\beta-tg^2\beta}{\cos^2\beta-ctg^2\beta}$

19.4.2. Докажите тождество: $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$

19.5. Сумма, разность и произведение тригонометрических функций

19.5.1. Найдите значение выражения: $\log_4 \cos 0° + \log_4 \cos 20° + \log_4 \cos 40° + \log_4 \cos 80°$

19.5.2. Найдите значение выражения:$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{3\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$

19.5.3. Найдите значение выражения: $tg20° \cdot tg40° \cdot tg80°$

19.5.4. Найдите значение выражения: $\frac{\cos 69° \cdot \cos 8° + \sin 8° \cdot \cos 21°}{2\cos 80° \cdot \cos 19° + 2\cos 10° \cdot \cos 71°}$

19.5.5. Найдите значение выражения: $\frac{25(\cos 10° - \cos 80°)(\sin 10° + \sin 80°)}{2 \cdot \cos 20°}$

19.5.6. Найдите значение выражения: $\frac{1}{\cos 40°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50°}$

19.5.7. (i) Найдите значение выражения: $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 70°$

19.5.8. Найдите значение выражения: $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$

19.5.9. Найдите значение выражения: $\lg(tg3°) \cdot \lg(tg6°) \cdot ... \cdot \lg(tg87°)$

19.5.10. (i, ii) $tg2° \cdot tg4° \cdot tg6° \cdot ... \cdot tg86° \cdot tg88°$

19.5.11. Вычислите $\sin 16° + \cos 16° \cdot tg37°$.

19.6. Обратные тригонометрические функции

19.6.1. При каких значениях параметра a выполняется тождество, и докажите его:

$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$

$ctg(arctga) = \frac{1}{a}$

$tg(\arccos a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$\sin(arctga) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

19.6.2. Сравните: $\frac{\pi}{4}$ и $\arcsin\frac{2}{3} + \arccos\frac{2}{3}$

19.6.3. Сравните: $\frac{\pi}{4}$ и $arctg\frac{1}{4} + arctg\frac{5}{8}$

19.6.4. Сравните: $tg1$ и $arctg1$

19.6.5. Пусть выражение $arctg\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{n}$. Найти n.

Найти значение выражений:

19.6.6. $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} + arctg\frac{1}{18} + ... + arctg\frac{1}{2n^2}$

19.6.7. Какой знак имеет число $\lg(arctg2)$?

19.6.8. Вычислите: $\arccos(\cos 11)$

19.6.9. Вычислите: $arctg(tg130°)$

19.6.10. Вычислите: $\arccos(\sin 5,3) - \frac{5\pi}{2}$?

19.7. Другое

19.7.1. Найти значение:

1) $\sin 9°$

2) $\cos 10°$

3) $\cos 36°$

4) $\cos 9°$

5) $\sin 75°$

6) $\cos 18°$

19.7.2. Что больше:

1) $\sin 59°$ или 0,85

2) $\sin 3,14$ или $\sin 3,15$

3) $\sin 4$ или $\sin 5$?

§20. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

20.1. Схемы для простых тригонометрических уравнений. Отбор корней

20.1.1. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

20.1.2. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5$

20.1.3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $tg\frac{\pi x}{4}=-1$

20.1.4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$

20.1.5. Решите уравнение $\cos x=\cos 3$

20.1.6. Решите уравнение $\sin x=\cos 3$

20.2. Схемы для более сложных уравнений. Более сложный отбор корней

20.2.1. Решите уравнения и найдите корни на промежутках:

1) $\frac{tg^2x-3}{\sqrt{3\sin x}}=0$, промежуток: $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$

2) $\frac{5tgx-12}{13\cos x-5}=0$, промежуток: $\left[4\pi;\frac{11\pi}{2}\right]$

3) $\sqrt{2\sin x+\sqrt{2}}\cdot\log_4(2\cos x)=0$, промежуток: $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$

4) $\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$, промежуток: $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$

5) $tg\,(4\sin x)=\sqrt{3}$

20.3. Замена переменной, разложение на множители. Отбор корней

20.3.1. Решите уравнения и найдите его корни на промежутках:

1) $\cos^2x+\sin x\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1$, промежуток: $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$

2) $2\cos^3x+1=\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, промежуток: $\left(-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right)$

3) $2\sin^2x+\sqrt{2}\sin x-10\sin x-5\sqrt{2}=0$, промежуток: $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

4) $2\cos^3x-\cos^2x+2\cos x-1=0$, промежуток: $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$

5) $\left(2x^2-5x-12\right)(2\cos x+1)=0$, промежуток: $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

6) $\sqrt{3}\cdot\sin x+\sin 2x=0$, промежуток: $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

7) $\log_7\left(2\cos^2x+3\cos x-1\right)=0$, промежуток: $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$

8) $4\sin^3x=\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$, промежуток: $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ 9) $2\sin^4x+3\cos 2x+1=0$, промежуток: $[\pi;3\pi]$

10) $3\cos 2x+1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, промежуток: $\left[-\frac{11\pi}{2};4\pi\right]$

11) $\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$, промежуток: $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$

12) $2\cos^2x-5\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)+1=0$, промежуток: $\left[-3\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

13) $2\cos 2x+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$, промежуток: $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$

14) $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, промежуток: $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$

15) $3\sin^2x+5\sin x+2=0$, промежуток: $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

16) $3\cos 2x+1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, промежуток: $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$

17) $6\sin^2x=7-7\cos x$, промежуток: $[-3\pi;-\pi]$

18) $6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right|=1$

19) $\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}$

20) $(tgx)^{\cos^2x}=(ctgx)^{\sin x}$

21) $4\left|\cos x\right|+3=4\sin^2x$

22) $\sin^4x+\cos^4x=\frac{3}{4}$

23) $\sin^8x+\cos^8x=\frac{17}{32}$

24) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

25) а) $\sin x + \cos x = 1,5$ б) (i) $\sin x \cdot \cos x = \sin 40^\circ$

26) $tg3x = 11tgx$

20.4. Преобразование уравнений. Схемы для других типов уравнений.

20.4.1. Решите уравнения и найдите его корни на промежутках:

1) $\frac{5}{tg^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$, промежуток: $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

2) $\frac{3ctg^2 x + 4ctgx}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0$, промежуток: $[-2\pi; 0]$

3) $\frac{2}{tg^2 x + 1} = \sin 2x$, промежуток: $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

4) $3\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4} = \frac{1 - ctgx}{1 - ctg^2 x}$, промежуток: $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$

5) $\sqrt{5 + \cos x} = -\sqrt{6} \cdot \sin x$, промежуток: $\left(\frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$

6) $\cos x + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + 1)} = 0$, промежуток: $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$

7) $\sqrt{6}\sin x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x - \sqrt{3}$, промежуток: $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

8) $ctg\frac{11\pi}{6} = \frac{2ctg + 3}{tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$, промежуток: $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{3}\right]$

9) $\sqrt{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$

20.5. Замена $\sin x \pm \cos x$

20.5.1. Решите уравнение: $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$ и найдите наибольший отрицательный корень уравнения

20.5.2. Решите уравнение: $|\sin x - \cos x| = 1 - \sin 2x$

20.5.3. $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = tgx + ctgx$

20.6. Однородные тригонометрические уравнения

20.6.1. (i) Решите уравнение $6\cos 2x - 14\cos^2 x - 7\sin 2x = 0$ и найдите его корень на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

20.7. Сумма и разность синуса, косинуса и тангенса

20.7.1. Решите уравнения:

1) $\sin 4x - \sin x = 0$

2) $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$

3) $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$

4) $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 8x\right) + \cos 6x = 1$

5) $\sin x - tg\frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1.$

6) $7\sin x = \sin 7x$

20.8. Введение вспомогательного угла

20.8.1. Решите уравнения:

1) (i) $3\sin x + 4\cos x = 5$

2) $\cos x + \sin x = 1$
3) $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$

20.9. Обратные тригонометрические функции

20.9.1. Решите уравнения:
1) $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = 0$
2) $2\sin(3\arccos x) = 1$
3) $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}$

20.10 Оценка

20.10.1. Решите уравнения:
1) $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$
2) $\cos^{2019}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^{2021} 7x = 2$
3) $\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x = 2$
4) $\cos x + \sin y = 2$

20.10.2. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin(2x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{4}$ и укажите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; 5\pi]$

20.10.3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = |\sin x| + |\cos x|$.

20.11 Неравенства

20.11.1. Решите неравенства:
1) $\cos(\sin x) < 0$
2) $\frac{\sin x}{1+\cos x} \geq 0$
3) $2\sin x + 5\cos x \leq \sqrt{29}$
4) а) $\sin x < \frac{1}{2}$; б) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; в) $tgx < 1$; г) $20\sin^2 x + 9\cos x > 21$; д) $tg\frac{1}{1+x^2} \geq 1$
5) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.
6) $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$
7) $\arccos x < \arcsin x$.

20.12 Тригонометрическая замена

20.12.1. Решите неравенство: $x^2 + x\sqrt{3 - 3x^2} \geq 0,5 + x$

20.12.2. Найдите максимум выражения: $|x|\sqrt{16 - y^2} + |y|\sqrt{4 - x^2}$

20.12.3. Решите уравнения:
1) $3x - 4x^3 = \sqrt{1 - x^2}$
2) $\left(2x + \sqrt{3}\right)\sqrt{4 - x^2} = x$

20.13 Системы уравнений

20.13.1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ 4\sin x \cdot \sin y = 3 \end{cases}$

2) Решите систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2-y^2)} + y \cdot tg\left(x^2 - y^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{y}{\cos(x^2-y^2)} + x \cdot tg\left(x^2 - y^2\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 75^\circ \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$

20.14 Другое

20.14.1. Решите уравнения:

1) $8\sin x \cos y \sin(x + y) = -1$

2) $2\cos(\sin x) - ctg 10^\circ tg 20^\circ ctg 50^\circ = 0$

3) $(\sin 1)^x + (\cos 1)^x = 1$

4) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sin x}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{17}{4}$ 5) $\log_{\cos x}(\sin x) = 1$

6) $\cos x = \cos\frac{1}{x}$

7) $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$

8) $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right) = -\frac{1}{2}$

10) $tg(ctgx) = ctg(tgx)$

§21. ПАРАМЕТРЫ

21.1. Введение

21.1.1. Решите уравнения с параметром a: а) $ax = -5$ б) $(a-1)x = -3$ в) $(a-2)x = 2-a$ г) $(a-2)x = (a-2)(a+3)$

21.1.2. Определите при каких значениях параметра a
а) уравнение $|x| = a-3$ имеет один корень;
б) уравнение $|x| = a^2-5$ не имеет корней;

21.1.3. Функция задана формулой $y = x^2 + ax + b$
Найдите a и b, если
а) график функции проходит через точки $(0;3)$ и $(-1;8)$;
б) наименьшее значение, равное -4, функция принимает при $x = 1$

21.1.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x+2| + 3\sqrt{x^2+4x+13} = 5a + 2|x-2a+2|$$

имеет хотя бы один корень

21.1.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x+a|| = 9|x-3|$ имеет два корня.

21.1.6. Решите уравнение: $x - |x| = a$

21.2. Координатно-параметрический метод

21.2.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a} = 0$ имеет ровно два различных корня.

21.2.2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

21.2.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2} = 0$ имеет ровно два различных корня.

21.2.4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x-a) = \sqrt{3x-2}\cdot\ln(2x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

21.2.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(4^x - 3\cdot 2^x + 3a - a^2\right)\cdot\sqrt{2-x} = 0$ имеет ровно два различных корня.

21.2.6. Найдите все действительные значения величины h, при которых уравнение

$$x\left(x+1\right)\left(x+h\right)\left(x+1+h\right)=h^2$$

имеет 4 действительных корня.

21.3. Преобразование графиков

21.3.1. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f\left(x\right)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$ больше 1.

21.3.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(|x-2|+|x+a|\right)^2-7\left(|x-2|+|x+a|\right)-4a\left(4a-7\right)=0$ имеет ровно два корня.

21.3.3. Максимальное значение выражения $x+2y$ при условии $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} ay\geq 1$ равно 4. Чему равно положительное значение параметра a?

21.3.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f\left(x\right)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f - чётная периодическая функция с периодом $T=\frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f\left(x\right)=ax^2$, если $0\leq x\leq\frac{8}{3}$.

21.4. Системы с параметром

21.4.1. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(|x|-5\right)^2+\left(y-4\right)^2=9\\ \left(x+2\right)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

21.4.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\frac{\left(y^2-xy-4y+2x+4\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}\\ a=x+y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

21.4.3. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(x-2a+3\right)^2+\left(y-4\right)^2=2,25\\ \left(x+3\right)^2+\left(y-a\right)^2=a^2+2a+1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

21.4.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right) \le 0 \\ y = ax+a+3 \end{cases}$$

не имеет решений.

21.5. Квадратичная функция

21.5.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right| < 3$ выполняется при всех значениях x.

21.5.2. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2+2px+3$и $y = x^2-6px+p$ расположены по разные стороны от оси x?

21.5.3. Найдите все значения a, при каждом из которых $f(x) = x^2 - \left|x-a^2\right| - 5x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

21.5.4. Найдите все значения параметра a при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{3x+3-2ax}{x^2+2(2a+1)x+4a^2+4a+2}$содержит отрезок $[0;1]$.

21.5.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит $[0;1]$.

21.5.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \le 2$$

не имеет решений на интервале $(1;2)$.

21.5.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{a^3-(x+2)a^2+xa+x^2}{a+x}$ имеет ровно один корень.

21.5.8. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\cos x - a}{\cos 2x - 4}$ содержит число -2.

21.5.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cos x - 2,5\cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

21.5.10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - a - 3 = 0$ имеет решения и найдите эти решения.

21.5.11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{|x|} = \frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} - \frac{12a+17}{a-5}$

имеет ровно два различных корня.

21.5.12. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a-\left(a^2-2a-3\right)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$$

содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

21.6. Расположение корней квадратного уравнения

21.6.1. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения

$$x^2+3ax+a^4=0$$

максимальна.

21.6.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1;1)$.

21.7. Аналитический методы

21.7.1. При каких значениях a корни уравнения $\left|x-a^2\right|=-a^2+2a+3$ имеют одинаковые знаки.

21.7.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+2\left|x-a\right|\geq a^2$ справедливо для всех действительных x.

21.7.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

21.7.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2-4ax+a\left(4a-1\right)\right)^2-3\left(x^2-4ax+a\left(4a-1\right)\right)-\left|a\right|\left(\left|a\right|-3\right)=0$$

имеет более двух корней.

21.7.5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases}|x|+\sin^2 y=2a+3\\ \cos x+tgy^2=2a^2+5a+4\end{cases}$$

.

21.8. Функциональные методы

21.8.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$ имеет единственный корень.

21.8.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0 \\ ax^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

21.8.3. Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

21.8.4. Найдите все неотрицательные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4\log_{1/3}\left(4a^2 - 4a + 9\right)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \left(\log_{1/3}\left(4a^2 - 4a + 9\right)\right)}$$

состоит из одной точки и найдите это решение.

21.8.5. Найдите все значения а, для каждого из которых уравнение $8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$ имеет более трёх различных решений.

21.8.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$ имеет более трёх различных решений.

21.8.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $64x^6 - (a - 3x)^3 + 4x^2 + 3x = a$ имеет более одного корня.

21.8.8. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $5|x-2| + 3|x+a| \leq \sqrt{4 - y^2} + 7$ имеет хотя бы один корень.

21.8.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(\log_7(2x+2a) - \log_7(2x-2a))^2 - 8a(\log_7(2x+2a) - \log_7(2x-2a)) + 12a^2 + 8a - 4 = 0$ имеет ровно два корня.

21.8.10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2+25} = 4|x - 5a| - 8|x|$ имеет хотя бы один корень.

21.8.11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+2)^2 \cdot \log_3\left(2x - x^2\right) + (3x-1)^2 \cdot \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$ имеет решение.

21.8.12. При каких значениях параметра a уравнение $ax^6 = e^x$ имеет одно положительное решение?

21.9. Разные задачи с параметром

21.9.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{1-(x^2-4x-a^2+2a+3)^6}+\sqrt{1+(x^2-4x-a^2+2a+3)^6}=2$$

имеет только один положительный корень.

21.9.2. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 5$ на отрезке, заданном неравенством $|x-2| \leq 1$, не меньше, чем -3.

21.9.3. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство $(x-a-2b)^2 + (y-3a-b)^2 < \frac{1}{2}$ имеет хотя бы одно целочисленное решение (x, y).

21.9.4. Найдите все a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a-9\cos^4 x} = \sin^2 x$ имеет решение

21.9.5. Найдите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $3x^2-12x+3a+9 = 4\sin\frac{4x-x^2-a-3}{2} \cdot \cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}$ имеет ровно два различных решения.

21.9.6. Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9\left|a^2-b+2\right| + 16$ не выполнено.

§22. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

22.1. Уравнения в целых числах

22.1.1. Решите уравнения в целых числах:
1) $(x-2)(xy+7)=1$
2) $x^2-y^2=55$
3) $xy+x+y=0$
4) $x+y=xy$
5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$
6) $x^2+xy-y=2$
7) $x^3-y^3=91$
8) $2xy+3x+y=0$.
9) $2x^2+xy=x+7$
10) $2x^2+xy-y^2-7x-4y=1$

22.1.2. Решите уравнение $2xy+3y^2=24$ в натуральных числах.
22.1.3. (i) Решите уравнение в целых числах: $6x^2+5y^2=74$
22.1.4. $9x+13y=-1$
22.1.5. Решите в целых числах: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=50$
22.1.6. Решите в целых числах:
1) $1!+2!+...+x!=y^2$
2) $x!+y!=(x+y)!$

22.1.7. Решите в целых числах: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$
Решите в целых числах:
22.1.8. Решите в целых числах: $x^3-10x^2+yx-y=0$
22.1.9. Решите в целых числах: $a+b+c=abc$
22.1.10. Решите в целых числах: $y^2+1=2^x$

22.2. Делимость

22.2.1. Докажите, что $\left(k^3+5k\right)\vdots 6$ при любом k.
22.2.2. Докажите, что $2^9+2^{99}\vdots 100$
22.2.3. Докажите, что $1991^{1917}+1917^{1991}\vdots 7$
22.2.4. Докажите, что $\left(\overline{abc}-\overline{cba}\right)\vdots 9$
22.2.5. Докажите, что при любом натуральном n, число$\left(3^{6n}-2^{6n}\right)$ делится на 35.
22.2.6. Докажите, что число $\left(2020^{2020}-1\right)$ делится на 2019.
22.2.7. Найдите все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

22.3. Целая и дробная часть

$[x]$ - целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ - дробная часть числа, т.е. $\{x\}=x-[x]$.
22.3.1. Решите уравнения:
1) $\left[x^2\right]=9$

2) (i) $x^2 - 5[x] + 4 = 0$

3) $x^3 - [x] = 3$

4) $[x]^{[x]} = 256$

22.3.2. Дано уравнение $\sqrt{x} = \sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}$. Решите его и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[tg\frac{\pi}{12}; tg\frac{5\pi}{12}\right]$

22.4. Другое

22.4.1. Найдите наибольший общий делитель: $\left(2^{40} - 1, 2^{30} - 1\right) =?$

22.4.2. Найдите сумму цифр числа $10^{999} - 999$.

§23. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

23.1. Производная

23.1.1. Решите уравнения:

1) $e^x = x$
2) $e^x = ex$
3) $e^x = x^e$
4) $x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
5) 2^π или π^2 другой способ
6) 3^π или π^3
7) $2^{x^2} = 2x^2$
8) $(x+1)^6 + (x+2)^6 + (x+3)^6 = 2$
9) $x^3 - 3x + 1 = 0$
10) $x^{100} = 333 \lg x + 6,67$
11) $\sin(\sin x) = x$

23.1.2. Что больше: $\left(\frac{1}{41}\right)^{\frac{1}{41}}$ или $\left(\frac{1}{43}\right)^{\frac{1}{43}}$?

23.2. Монотонность

23.2.1. Решите уравнения: $x^x = 4$

23.3. Оценка

23.3.1. Решите уравнения:

1) $2^{x-1} + 2^{-x-1} = \cos x$
2) $2^{x^2} = \cos x^2$
3) $3^x + 3^{-x} = 2\cos x$
4) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{5}$
5) $\log_2\left(4x - x^2 - 2\right) \geq 2^{|x-2|}$
6) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3\sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2$
7) $x^2 + x + 1 = \sin x$
8) $3^{|x|} = \sin\left(x^2\right)$
9) $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$
10) $\cos(\pi x) + x^2 - 6x + 10 = 0$

23.4. Простые функции

23.4.1. Найдите линейную функцию $f(x)$, если $f(5) = 4$ и $f(6) = 1$

23.4.2. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 2x^2$, если $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$.

23.4.3. Найдите $f(x)$, если $f(x) + 2f(-x) = 2 - x$

23.4.4. Найдите $g(x)$, если $f(11 - x) = 50 - 3x$ и $f(g(x)) = 9x - 1$

23.4.5. Найдите $f(x)$, если $f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

23.4.6. Найдите $f(x)$, если $2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5$

23.4.7. Найдите $f_n(x) = \underbrace{f(f(...f(x)))}_{n}$, если $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

23.5. Функциональные уравнения

23.5.1. Найдите $p(x-7) + p(13-x)$, если $p(x) = 2x + 1$.
23.5.2. Найдите значение выражения: $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$.
23.5.3. Найдите значение выражения: $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(b) = \frac{b(6-b)}{b-3}$.
23.5.4. Найдите $f(x+1)$, если $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.
23.5.5. (i) $f(5)$, если $f(1-2x) = 5^{3x+7}$

23.6. f(f(x))=x

23.6.1. $2\sqrt[3]{2x+1} = x^3 - 1$
23.6.2. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

§24. РАЗНОЕ

24.1. Задачи

24.1.1. Найдите минимум выражения: $|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

24.1.2. Решите уравнение: $5^{7x-1}+\sqrt{7x-1}=5^{x^2-9}+\sqrt{x^2-9}$.

24.1.3. Найдите множество точек плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

24.1.4. Решите неравенство: $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geq 0$.

24.1.5. При каких действительных x и y верно неравенство:

$$\sqrt{\log_x\left(\pi-\sqrt{y}\right)}+2\cos\left(3\pi\cos\sqrt{y}\right)+\sqrt{\log_{\pi-\sqrt{y}}x}\leq 0?$$

24.1.6. Решите уравнение: $\sqrt{5-x}=x^2-5$