Центр педагогического мастерства
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
факультет математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Москва 25 сентября 2022 года

XIX Творческий конкурс учителей по математике

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 — №5. «Математический» (задачи для решения).
№6 — №10. «Методический» (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

I. Решите задачи.

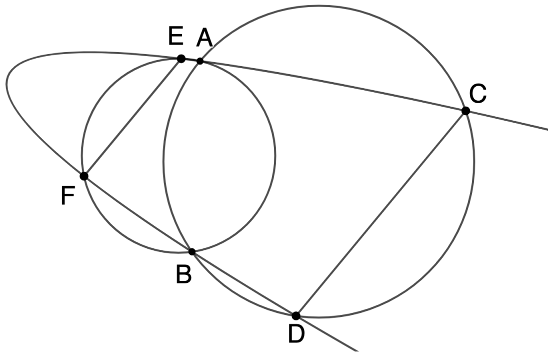
1. В конечной геометрической прогрессии a_1, a_2, $\ldots$, a_n известны сумма всех членов $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и сумма чисел, им обратных, $B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$. Чему равняется произведение всех членов прогрессии $P = a_1 a_2 \ldots a_n$?

2. Перед экзаменом Вовочка вырвал для шпаргалок 20% листов из учебника, не обязательно идущих подряд. Нумерация страниц в учебнике начиналась с 1. Докажите, что сумма номеров оставшихся страниц кратна 4.

3. Найдите градусную меру острого угла x, если $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$.

4. Ученик считается прилежным, если у него меньше пяти друзей. Ученик считается образцовым, если все его друзья прилежные. Может ли образцовых учеников быть больше, чем прилежных?

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Парабола пересекает первую окружность в точках A, B, C и D, а вторую — в точках A, B, E и F (см. рисунок). Докажите, что $CD \parallel EF$.



II. Методический блок.

В заданиях NN6–9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

6. «Задача». В пространстве даны три неколлинеарных вектора: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ коллинеарен $\overrightarrow{c}$, вектор $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$ коллинеарен $\overrightarrow{b}$, вектор $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ коллинеарен $\overrightarrow{a}$. Найдите модуль вектора $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

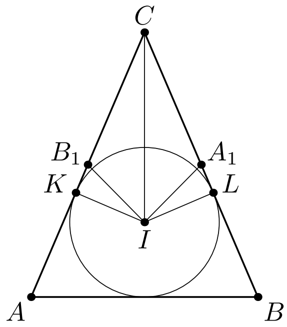
«Решение». Из условия «задачи» следует, что $2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$. значит, $x = y = z = 2$, то есть каждый данный вектор есть медиана треугольника, построенного на двух других, и проведенная к третьей стороне. Это невозможно, то есть условие «задачи» некорректно.

7. «Задача». На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. Сколько чисел записано на доске?

«Решение». Обозначим количество положительных чисел через k, а количество отрицательных чисел через l. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 4k$, $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+l} = -8l$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+l} = -3(k + l)$. Заметим, что сумма левых частей первых двух равенств даёт левую часть третьего равенства. Поэтому $4k - 8l = -3(k + l) \Leftrightarrow 7k = 5l$. При этом $40 < k + l < 48$. Однако, среди значений k, кратных 5, и значений l, кратных 7, нет чисел, сумма которых лежит в указанном интервале. Значит, задача не имеет решения.

8. «Задача». В треугольнике ABC равны расстояния от центра вписанной окружности до середин сторон AC и BC. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

«Решение». Пусть I — центр вписанной окружности, K и L — точки её касания со сторонами AC и BC соответственно, B_1 и A_1 — середины этих сторон (см. рисунок). Тогда равны прямоугольные треугольники IKB_1 и ILA_1 (по катету и гипотенузе), значит, $B_1K = A_1L$. Учитывая, что $CK = CL$, получим, что $CA_1 = CB_1$, то есть $CA = CB$.



9. «Задача». Справедлив ли «принцип вложенных кругов»: если есть такая последовательность кругов на плоскости, что каждый следующий лежит внутри предыдущего, то у этих кругов есть общая точка, причём единственная, если радиусы кругов стремятся к нулю?

«Ответ»: справедлив.

«Решение». Рассмотрим проекции наших кругов на оси абсцисс и ординат. В обоих случаях получим последовательности вложенных отрезков, которые имеют, по известной лемме, общие точки x_0 и y_0 соответственно. Точка $(x_0; y_0)$ и есть искомая. При стремлении радиусов кругов к нулю она будет единственной, так как единственными будут x_0 и y_0.

10. На олимпиаде была предложена задача: «Имеется 10 медалей: 2 золотые, 3 серебряные и 5 бронзовых. Медали из одного и того же металла неотличимы друг от друга. Сколькими способами можно разложить все 10 медалей по кругу так, чтобы одинаковые медали не лежали рядом?».

Жюри получило два разных решения с разными ответами, и оба были признаны верными.

а) Как Вы считаете, почему?

б) Воспроизведите эти решения.

в) Переформулируйте условие задачи, чтобы оно воспринималось однозначно и не требовало в тексте дополнительных пояснений.