

1. Источник: ПВГ, 2013, Вариант 5, №3. Задача 16 из ЕГЭ.

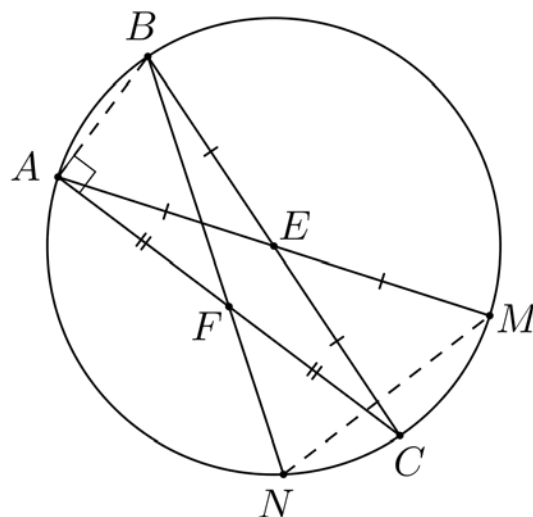
В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN . При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC , а прямая BN – через середину F отрезка AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AM:AE = 2:1$, $BN:BF = 17:13$.

Решение.

По теореме о пересекающихся хордах:

$$AE \cdot EM = BE \cdot EC.$$

Но так как по условию $AE = EM$ и $BE = EC$, то $AE = BE = CE$, т.е. E – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности (ведь образовались треугольники, в которых длина медианы равна половине длине стороны – прямоугольные треугольники). Значит, угол A – прямой.



Так как аналогично $AF \cdot FC = BF \cdot FN$ и по условию: $BF = 13x$, $FN = 4x$, то $AF = FC = 2\sqrt{13}x$. Следовательно, из прямоугольного треугольника ABF :

$$AB^2 = BF^2 - AF^2 = 9 \cdot 13x^2,$$

а из треугольника ABC :

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9 \cdot 13x^2 + 16 \cdot 13x^2 = 36 \Rightarrow x = \frac{6}{5\sqrt{13}}.$$

Поэтому периметр равен $7\sqrt{13}x + 6 = 72/5$.

Ответ: 72/5.

2. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1994, вар. 1, №1). Задание №12 из ЕГЭ.

Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x - \cos 3x} = 1 + \sin 2x.$$

Решение.

Используя формулу $\cos x - \cos 3x = 2 \sin x \sin 2x$, получим:

$$2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} < -1, \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

3. Источник: САММАТ 2018, онлайн-этап. Задача 9 из ЕГЭ.

Имеются 3 слитка: 1-й слиток – сплав меди и никеля, 2-й слиток – сплав никеля с цинком, 3-й слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить 1-й слиток со 2-м, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в 1-м слитке. Если сплавить 2-й слиток с 3-м, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во 2-м слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве трех слитков, если во 2-м слитке цинка 12%, а в 3-м – 5%?

Решение.

Составим таблицу.

Сплав	Содержание металла		
	Медь	Никель	Цинк
1	a	b	–
2	–	c	d
3	e	–	f

Сплавим первый слиток со вторым, масса сплава составит $a + b + c + d$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{a}{a + b + c + d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a + b}, \quad 2a + 2b = a + b + c + d, \quad a + b = c + d.$$

Сплавим второй слиток с третьим, масса сплава составит $c + d + e + f$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{c}{c + d + e + f} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c + d}, \quad 3c + 3d = c + d + e + f, \quad e + f = 2(c + d).$$

Содержание цинка во втором слитке:

$$\frac{d}{c + d} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}, \quad c + d = \frac{25d}{3}.$$

Содержание цинка в третьем слитке:

$$\frac{f}{e + f} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad e + f = 20f; \quad 20f = \frac{50d}{3}, \quad f = \frac{5}{6}d.$$

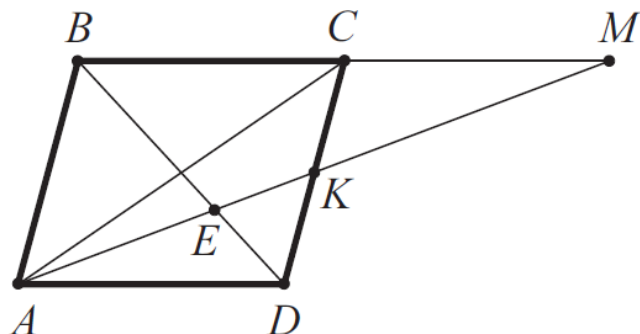
При сплаве всех трех слитков содержание цинка запишется так:

$$\frac{d + f}{a + b + c + d + e + f} = \frac{d + \frac{5}{6}d}{\frac{25d}{3} + \frac{25d}{3} + \frac{50d}{3}} = \frac{5,5}{100} = 5,5\%.$$

Ответ: 5,5.

4. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1994, вар. 1, №3). Задание №16 из ЕГЭ.

В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AD угол в 30° . Точка K – середина стороны CD . Отрезки AK и BD пересекаются в точке E . Найти длину диагонали AC , если расстояние от точки E до прямой BC равно 1.



Решение.

Продолжим AK до пересечения с лучом BC в некоторой точке M . Треугольники AKD и CMK равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Значит, $MC = AD = BC$ и $BM = 2AD$.

Треугольники BME и ADE подобны (по двум углам), причем коэффициент подобия равен 2. Следовательно, высота треугольника ADE , опущенная из точки E , в два раза короче высоты треугольника BME , проведенной из той же точки. В сумме эти высоты составляют высоту h параллелограмма. Таким образом,

$$h = \frac{3}{2}, \quad AC = \frac{h}{\sin \angle CAD} = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 3.$$

Ответ: 3.

5. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1994, вар. 1, №4). Задание №14 из ЕГЭ.

Решить неравенство

$$|x - 1|^{2\sqrt{x+2}} < |x - 1|^{x+1}.$$

Решение.

Пусть сначала $0 < |x - 1| < 1$, то есть $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$. В данном случае большему показателю степени отвечает меньшая степень и исходное неравенство превращается в $x + 1 < 2\sqrt{x + 2}$. Так как $x + 1 > 0$, то полученное неравенство можно возвести в квадрат. В итоге находим $x^2 + 2x + 1 < 4x + 8$, $x \in (1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$. Учитывая ограничение на область изменения переменной x , заключаем, что $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$.

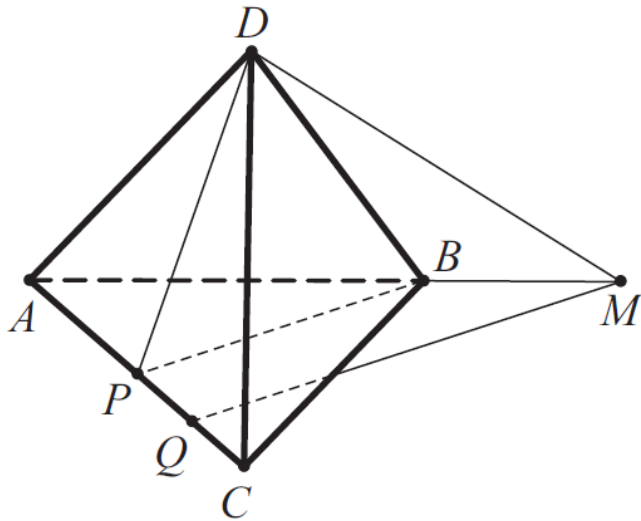
Пусть теперь $|x - 1| > 1$, то есть $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. В этом случае исходное неравенство равносильно $2\sqrt{x + 2} < x + 1$. Значения $x < -1$ заведомо не удовлетворяют полученному неравенству, так как они либо не попадают в область определения корня $\sqrt{x + 2}$, либо $x + 1$ будет отрицательно, а $\sqrt{x + 2}$ – нет. Если же $x \geq -1$, то неравенство $2\sqrt{x + 2} < x + 1$ можно опять возвести в квадрат и получить $x \in (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$. Учитывая ограничения на область изменения x , приходим к заключению $x \in (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2) \cup (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

6. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1994, вар. 1, №5). Задание №13 из ЕГЭ.

Пусть $ABCD$ – правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны 1. На луче AB выбрана точка M ($AM > AB$) так, что косинус угла между прямыми AC и DM равен $1/4$. Найти BM .

Решение.



Положим $BM = x$ и обозначим через P и Q соответственно проекции точек D и M на прямую AC . Понятно, что P – середина AC , поэтому PQ будет проекцией не только отрезка DM , но и отрезка BM . Следовательно,

$$PQ = BM \cdot \cos \angle BAC = \frac{1}{2}x.$$

С другой стороны, PQ равняется произведению DM и косинуса угла между прямыми DM и AC , то есть $PQ = \frac{1}{4}DM$. Величину DM найдем из треугольника AMD по теореме косинусов: $DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle ADM = x^2 + x + 1$. Приравнявая найденные выражения для PQ , приходим к уравнению

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + x + 1}, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Геометрическому смыслу задачи отвечает только положительный корень.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

7. Источник: ПВГ, 2013, Вариант 7, №2. Задача 17 из ЕГЭ.

Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x+1)^2 + |y-1| = 2, \\ y = b|2x+1| + a \end{cases}$$

имеет решения.

Решение.

Изобразим решение системы на координатной плоскости. Первое уравнение системы задает объединение двух дуг парабол:

$$y = 3 - (x+1)^2, \quad y \geq 1;$$

$$y = (x+1)^2 - 1, \quad y < 1.$$

Второе уравнение системы при $b = 0$ определяет на плоскости прямую $y = a$, а при $b \neq 0$ – два луча:

$$y = b(2x+1) + a, \quad x \geq -\frac{1}{2};$$

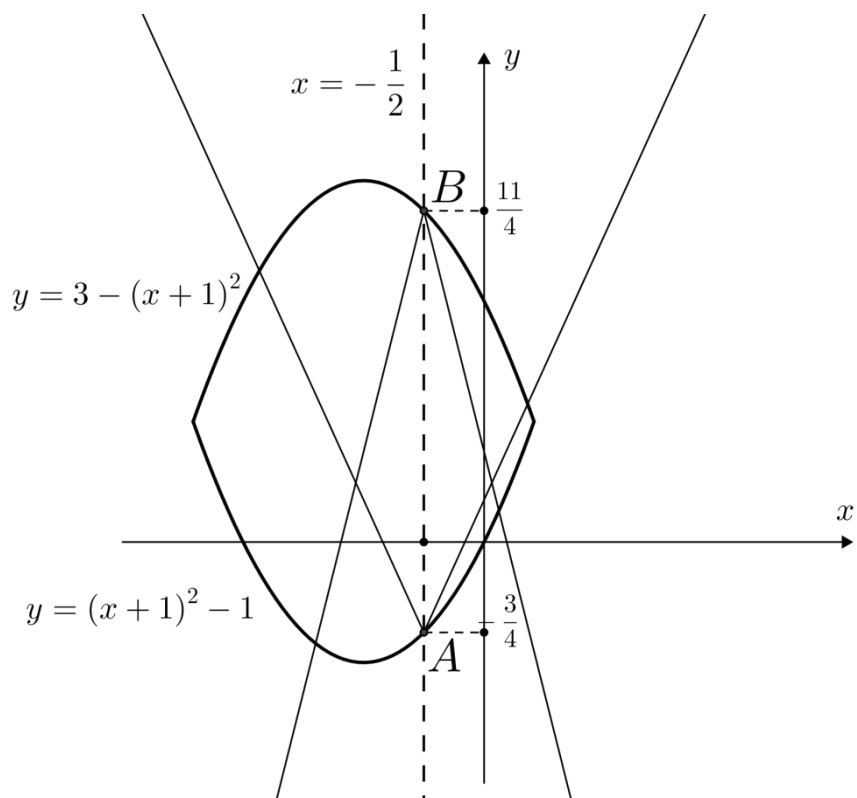
$$y = -b(2x+1) + a, \quad x < -\frac{1}{2}$$

с общим началом в точке $(-1/2; a)$.

Прямая $x = -1/2$ пересекает дуги парабол в точках

$$A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right).$$

Поэтому для того, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы общее начало лучей лежало на отрезке AB .



Ответ: $-\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{11}{4}$.

8. Придумана самостоятельно. Задача 3 из ЕГЭ.

На соревнованиях по стрельбе из лука приглашены четыре команды по четыре участника в каждой. Порядок выступления спортсменов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что Робин Гуд из команды «Шервудский лес» будет выступать под номером 13.

Решение.

Всего участников $4 \cdot 4 = 16$. Искомая вероятность найдется следующим образом:

$$\frac{1}{16} = 0,0625.$$

Ответ: 0,0625.

9. Придумана самостоятельно. Задача 5 из ЕГЭ.

Найдите корень уравнения $17^{4-\sqrt{x}} = 1/289$.

Решение.

$$17^{4-\sqrt{x}} = \frac{1}{289} = 17^{-2}, \quad 4 - \sqrt{x} = -2, \quad x = 36.$$

Ответ: 36.

10. Придумана самостоятельно. Задача 6 из ЕГЭ.

Найдите значение выражения $29 \operatorname{tg}(-405^\circ)$.

Решение.

$$29 \operatorname{tg}(-405^\circ) = -29 \operatorname{tg}(405^\circ - 360^\circ) = -29 \operatorname{tg} 45^\circ = -29.$$

Ответ: -29 .