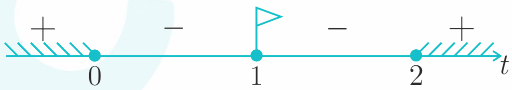
Логарифмические неравенства с постоянным основанием

Чтобы решать логарифмические неравенства уровня ЕГЭ, надо:

- Знать, что такое логарифм;
- Уметь решать базовые логарифмические неравенства;
- Уметь решать дробно – рациональные неравенства;
- Знать свойства логарифмов и уметь ими пользоваться;
- Знать какие ограничения у логарифма;
- Никогда, слышите, НИ-КОГ-ДА не забывать про ограничения!

Задача 13. Решите неравенство (ЕГЭ 2015):

$\lg^4 x - 4\lg^3 x + 5\lg^2 x - 2\lg x \geq 0$	Как всегда, когда дело касается логарифмов, начнем с ограничений.
Ограничение: $x > 0$	Логарифмы «одинаковы»: с одинаковым аргументом и одинаковым основанием, поэтому удобно сделать замену.
$t = \lg x$	
$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t \geq 0$	Разложим выражение на множители. Сначала вынесем за скобку t.
$t\left(t^3 - 4t^2 + 5t - 2\right) \geq 0$	В скобках кубическое выражение, разложить такие выражения можно двумя способами: либо методом группировки, либо делением многочлена на многочлен. Попробуем поделить. Сначала простым подбором найдем один из корней многочлена $t^3 - 4t^2 + 5t - 2$.
$1: \quad 1 - 4 + 5 - 2 = 0$	Число 1 является корнем, т.к. при подстановке превращает многочлен в 0. Поэтому поделим многочлен $t^3 - 4t^2 + 5t - 2$ на $t - 1$.
$\begin{array}{rl} -\,t^3 - 4t^2 + 5t - 2 & \vert\; t-1 \\ \underline{t^3 - t^2} \qquad\qquad & \vert\; t^2 - 3t + 2 \\ -\,-3t^2 + 5t \quad & \\ \underline{-3t^2 + 3t} \quad & \\ -\,2t - 2 & \\ \underline{2t - 2} & \\ 0 & \end{array}$	Запишем неравенство в новом виде.
$t(t-1)\left(t^2 - 3t + 2\right) \geq 0$	Разложим квадратный трехчлен на множители.
$D = 9 - 8 = 1$ $t_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1; \quad t_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$	Запишем преобразованное неравенство.
$t(t-1)^2(t-2) \geq 0$	Теперь применим метод интервалов.
	Перейдем к совокупности.
$\left[\begin{array}{l} t \leq 0 \\ t = 1 \\ t \geq 2 \end{array}\right.$	Сделаем обратную замену.

$\left[\begin{array}{l} \lg x \le 0 \\ \lg x = 1 \\ \lg x \ge 2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x = 10 \\ x \ge 100 \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 1] \cup \{10\} \cup [100; \infty)$	Теперь вспомним, что у нас есть ограничения и запишем ответ с его учетом.
Ответ: $(0; 1] \cup \{10\} \cup [100; \infty)$	

Выводы из решения 13 задачи:

- Для разложения на множители многочлена третьей или четвертой степени может пригодиться деление многочлена на многочлен уголком.
- В логарифмических неравенствах очень важно не забыть про ограничения. Они влияют на ответ почти в каждом примере.
- В логарифмических неравенствах замена переменных используется довольно часто. Помните об этом методе.

45. (ЕГЭ 2017) $\dfrac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \ge 2$

46. $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$

47. $\log_2^3\left(4 + 3x - x^2\right) - 8\log_2^2\left(4 + 3x - x^2\right) - 17\log_{0,5}\left(4 + 3x - x^2\right) - 10 > 0$

Задача 14. Решите неравенство (ЕГЭ 2017):

$\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \ge \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$	Найдем ограничения.
Ограничения: 1) $x > 0$ 2) $\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right) \ne 0$ $\dfrac{x}{27} \ne 1$ $x \ne 27$ 3) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 \ne 0$ $\log_3^2 x - 3\log_3 x \ne 0$ $\log_3 x\left(\log_3 x - 3\right) \ne 0$ $\log_3 x \ne 0 \quad \log_3 x - 3 \ne 0$ $x \ne 1 \quad \log_3 x \ne 3$ $x \ne 27$	
Решение: $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \ge \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$	Напрашивается замена $t = \log_3 x$, но мешает пара логарифмов, которые "не такие как все". Давайте лишим их индивидуальности, для этого применим свойства логарифмов: $\log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ $\log_{a^m} b^k = \dfrac{k}{m}\log_a b$
$\dfrac{\log_3 x}{\log_3 x - 3} \ge \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{5}{\log_3^2 x - 3\log_3 x}$	Заменим $t = \log_3 x$.

$t = \log_3 x$	
$\dfrac{t}{t-3} \geq \dfrac{2}{t} + \dfrac{5}{t^2 - 3t}$	Приведем все слагаемые в неравенстве к общему знаменателю.
$\dfrac{t^2 - 2t + 1}{t(t-3)} \geq 0$	Числитель можно свернуть по формуле квадрата разности.
$\dfrac{(t-1)^2}{t(t-3)} \geq 0$	Применим метод интервалов.
	Запишем решение в виде совокупности, сделаем обратную замену и решим простейшие логарифмические неравенства и уравнение.
$\left[\begin{array}{l} t < 0 \\ t = 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x = 1 \\ \log_3 x > 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x = 3 \\ x > 27 \end{array}\right.$	Запишем ответ с учетом ограничений.
Ответ: $(0;1) \cup \{3\} \cup (27;\infty)$	

48. $\log_4^2\left(49 - x^2\right) + 3\log_{0,25}\left(49 - x^2\right) + 2 \geq 0$

49. $\dfrac{3\lg(x+2)+1}{\lg^2(x+2)+\lg(x+2)} \geq 1 + \dfrac{1}{\lg(x+2)}$

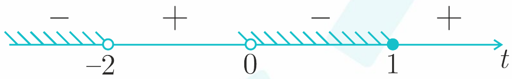
50. (ЕГЭ 2017) $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \dfrac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \dfrac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4 2x - 9}$

51. $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 1}{\lg x} + \dfrac{7\lg^2 x - 7\lg x + 2}{\lg(0,1x)} \leq 8\lg x + 1$

52. $\dfrac{25}{\log_2^4 x} - \dfrac{26}{\log_2^2 x} + 1 \leq 0$

Задача 15. Решите неравенство:

$\log_{9x} 27 \leq \dfrac{1}{\log_3 x}$	Найдем ограничения.
$\begin{cases} x > 0 \\ 9x > 0 \\ 9x \neq 1 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\left(0;\frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9};1\right) \cup (1;\infty)$	
Решение: $\log_{9x} 27 \leq \dfrac{1}{\log_3 x}$	В первом логарифме есть переменное основание $(9x)$. Переменное основание (т.е. содержащие в себе x) создает кучу сложностей, подробнее о них вы можете узнать из объяснений ниже, в разделе логарифмические неравенства с переменным основанием. Здесь мы скажем кратко: не хотите проблем - избегайте переменных оснований. Чтобы избавиться от сложностей в данном примере воспользуемся свойством логарифма: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\dfrac{1}{\log_{27} 9x} \le \dfrac{1}{\log_3 x}$	Что есть общего у двух логарифмов? Тройка в основании, просто в первом логарифме она видоизменена. Представим 27 как 3^3, и по свойству логарифмов, вынесем степень 3 за логарифм.
$\dfrac{1}{\frac{1}{3}\log_3 9x} \le \dfrac{1}{\log_3 x}$	С трехэтажными дробями неудобно работать и в любой ситуации от них лучше избавляться. Перевернем $\frac{1}{3}$ и отправим 3 в числитель.
$\dfrac{3}{\log_3 9x} \le \dfrac{1}{\log_3 x}$	До замены переменных остался один маленький шаг. В первом логарифме воспользуемся свойством: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$
$\dfrac{3}{\log_3 9 + \log_3 x} \le \dfrac{1}{\log_3 x}$ $\dfrac{3}{2 + \log_3 x} \le \dfrac{1}{\log_3 x}$	Дальше замена и стандартные преобразования. Я их напишу без комментариев.
$t = \log_3 x$ $\dfrac{3}{2+t} \le \dfrac{1}{t}$ $\dfrac{3}{2+t} - \dfrac{1}{t} \le 0$ $\dfrac{3t-(2+t)}{(2+t)t} \le 0$ $\dfrac{3t-2-t}{(t+2)t} \le 0$ $\dfrac{2t-2}{(t+2)t} \le 0$ $\dfrac{2(t-1)}{(t+2)t} \le 0$  $\left[\begin{array}{l} t < -2 \\ \begin{cases} t > 0 \\ t \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_3 x < -2 \\ \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{9} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x \le 3 \end{cases} \end{array}\right.$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$ С учётом ограничений: $x \in \left(0; \dfrac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$	
Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$	

Выводы из решения 15 задачи:

- Если есть возможность – меняйте основание логарифма с переменного (содержащего иксы) на постоянное (содержащего только числа).
- Не забывайте, что основание логарифма должно быть больше нуля и не равно единице.

53. $\log_x 2 + 2\log_{2x} 2 \geq 2$

54. $\dfrac{1}{\log_x 0,5} + 6 \geq 16\log_{4x} 2$

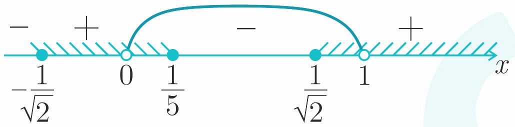
55. $\log_3(x-1) \leq 4 - 9\log_{9(x-1)} 3$

56. $\dfrac{1}{\log_{x^2+x} 0,5} + \dfrac{1}{\log_{x^2+x} 0,25} + \dfrac{1}{\log_{x^2+x} 4} \geq 1$

57. $\log_3 \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{1+\log_3 9x} \geq 0$

Задача 16 (ЕГЭ 2018). Решите неравенство:

$2\log_{0,7} x\sqrt{2} - \log_{0,7}\dfrac{x}{1-x} \geq \log_{0,7}\left(8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right)$	Давайте найдем ограничения. С первыми двумя аргументами проблем нет. Первый аргумент дает условие $x > 0$, Второй $x \in (0;1)$. А вот с третьим есть сложности - школьных знаний недостаточно для решения такого неравенства. Как же так может быть? В ЕГЭ дают, то, что не может решить школьник? Конечно нет. Дело в том, что $8x^2 + \frac{1}{x} - 5 > 0$ решать и не надо, так как оно выполняется автоматически при выполнении перых двух требований. Чуть ниже, в решении, мы в этом убедимся.
$\begin{cases} x\sqrt{2} > 0 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{x}{x-1} < 0 \end{cases} \quad x \in (0;1)$	Пока этого достаточно. Позже мы вернемся к третьему условию.
Решение: $2\log_{0,7} x\sqrt{2} - \log_{0,7}\dfrac{x}{1-x} \geq \log_{0,7}\left(8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right)$	Что видим интересного? У логарифмов одинаковые основания. Если мы приведем наше неравенство к виду: $\log_{0,7} f(x) \geq \log_{0,7} g(x)$, то можно будет избавиться от логарифмов и перейти к $f(x) \leq g(x)$. К первому логарифму применяем свойство $c\log_b a = \log_b a^c$.
$\log_{0,7} 2x^2 - \log_{0,7}\dfrac{x}{1-x} \geq \log_{0,7}\left(8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right)$	Теперь применим свойство $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$.
$\log_{0,7}\left(2x^2 : \dfrac{x}{1-x}\right) \geq \log_{0,7}\left(8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right)$	Основание у логарифмов меньше единицы. Поэтому при избавлении от них нужно поменять знак на противоположный.
$2x^2 : \dfrac{x}{1-x} \leq 8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5$	А вот и обещанное доказательство. Мы знаем, что $2x^2 > 0$, так как $x > 0$. $\dfrac{x}{1-x} > 0$ из-за ограничений логарифмов. Получается $8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5$ больше или равно частному двух положительных чисел, а значит условие $8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5 > 0$ выполняется автоматически. Осталось это аккуратно записать в решение.
$2x^2 > 0$ (т.к. $x > 0$) и $\dfrac{x}{1-x} > 0$ - из-за ограничений логарифмов. Следовательно и $8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5 > 0$ из условия неравенства.	Дальше продолжаем решение как обычно.
$\dfrac{2x^2(1-x)}{x} \leq 8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5$	Умножаем все неравенство на икс - это можно сделать так как $x > 0$.
$2x^2(1-x) \leq 8x^3 + 1 - 5x$	Раскрываем скобки.

$2x^2 - 2x^3 \le 8x^3 + 1 - 5x$	Переносим все слагаемые в правую часть и приводим подобные.
$0 \le 10x^3 - 2x^2 - 5x + 1$	Записываем полученное неравенство зеркально.
$10x^3 - 2x^2 - 5x + 1 \ge 0$	Теперь применим мой любимый метод - метод группировки. Из первых двух слагаемых выносим $2x^2$, из третьего и четвертого -1
$2x^2(5x-1) - (5x-1) \ge 0$	Выносим $(5x-1)$.
$(5x-1)\left(2x^2-1\right) \ge 0$	Приводим скобки к виду пригодному для применения метода интервалов: из первой выносим 5, из второй 2.
$10\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}\right) \ge 0$	Раскладываем вторую скобку как разность квадратов.
$10\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ge 0$	Дальше главное правильно расставить числа на координатной прямой. Если есть хоть капелька сомнений - сравнивайте числа на черновике. Например, вот так можно убедиться, что $\frac{1}{\sqrt{2}}$ больше $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mid \cdot 5 \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt{2} < 5$ И сразу на числовой прямой учтём ограничения.
	Запишем ответ.
Ответ: $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$	

Выводы из решения 16 задачи:

- Если одно из ограничений не решается, возможно, его и не надо решать. Вероятно, по условию неравенства в этом нет необходимости. Хотя еще более вероятно, что при переписывании условия вы сделали ошибку.
- Если у логарифма основание меньше 1, то при переходе от $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$, к $f(x) \wedge g(x)$ знак меняется на противоположный.
- Для разложения многочленов высших степеней (третей, четвертой и т.д.) используют либо метод группировки, либо метод деления многочлена уголком.
- Если есть сомнения при расстановке чисел на оси – сравнивайте их. Лучше потратить минуту на сравнение чисел, чем получить неверный ответ и полностью потерять баллы за эту задачу.

58. (ЕГЭ 2019) $\log_{\frac{1}{4}}\left((2-x)\left(x^2+7\right)\right) \le \log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-5x+6\right) + \log_{\frac{1}{4}}(5-x)$

59. (ЕГЭ 2019) $\log_3\left((x-2)\left(x^2+9\right)\right) \le 2 + \log_3\left(x^2+x-6\right) - \log_3 x$

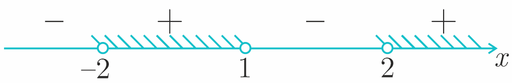
60. $\log_6\left(64^x + 36^x - 65 \cdot 8^x + 64\right) \ge 2x$

61. (ЕГЭ 2018) $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\geq\log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right)$

62. (ЕГЭ 2018) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\left(x^2+3x-9\right)\leq\log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right)$

Тут проходит водораздел. С вероятностью 80% на ЕГЭ встретится что-то похожее на разобранные ранее примеры. Поэтому часто для экономии времени я не включаю в программу задания, которые будут ниже. Шанс, что они встретятся на ЕГЭ не очень большой, а вот экономическая (15 задача) попадется точно, так что если у вас в запасе меньше пары месяцев лучше обратить внимание на 15 или на 18(a) задание.

Задача 17. Решите неравенство:

$\log_4\left(x^2-4\right)^2+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0$	Найдем ограничения.
Ограничения: $\begin{cases}(x^2-4)^2>0\\ \frac{x-1}{x^2-4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4\neq0\\ \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}>0\end{cases}$  $(-2;1)\cup(2;\infty)$	
Решение: $\log_4\left(x^2-4\right)^2+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0$	Чтобы вы лучше поняли некоторые тонкости, эту задачу я сначала решу неправильно, потом правильно, но с модулями, а затем правильно и без модулей.
Внимание! Приведенное ниже решение - ошибочно.	
$2\log_4\left(x^2-4\right)+\log_2(x-1)-\log_2\left(x^2-4\right)>0$	В первом логарифме представим 4 как 2^2 и вынесем степень из основания.
$\log_2\left(x^2-4\right)+\log_2(x-1)-\log_2\left(x^2-4\right)>0$ $\log_2(x-1)>0$ $x-1>1$ $x>2$	

Почему решение ошибочно? Проблема в формулах. Дело в том, что свойство:

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$$

верно только когда $a>0, a\neq1, b>0, c>0$, а в нашем неравенстве аргумент $x-1$ может быть отрицателен. Например, при $x=-1$ (что не запрещено ограничениями) он будет равен -2. Вот как должны выглядеть свойства логарифмов в уравнениях и неравенствах:

$$\log_a bc=\log_a|b|+\log_a|c|,\ \text{где } a>0, a\neq1, bc>0$$

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a|b|-\log_a|c|,\ \text{где } a>0, a\neq1, c\neq0, \frac{b}{c}>0$$

Также есть сложности и со свойством, позволяющем "снимать" степени с аргумента и основания:

$$\log_{a^k}b^m=\frac{m}{k}\log_a b$$

Эта формула верна только если степени нечетные. Потому что если они четные, то мы обязательно должны добавлять модули, вот так:

$$\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k}\log_{|a|}|b|, \text{ где } b^m > 0, a^k > 0, a^k \neq 1$$

Иначе под логарифмом может появится минус, что запрещено.

С учётом вышесказанного, решение должно выглядеть так:

$2\log_4 \left\|x^2-4\right\| + \log_2 \|x-1\| - \log_2 \left\|x^2-4\right\| > 0$ $\log_2 \left\|x^2-4\right\| + \log_2 \|x-1\| - \log_2 \left\|x^2-4\right\| > 0$ $\log_2 \|x-1\| > 0$ $\|x-1\| > 1$ $\left\{\begin{array}{l} x-1>1 \\ x-1<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right.$	

Знаю, что не все дружат с модулями. Поэтому покажу другой метод решения:

$\log_4\left(x^2-4\right)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0$	В первом логарифме: представим 4 как 2^2 и показатель степени вынесем из основания.
$\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-4\right)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0$	Еще один тонкий момент. При взгляде на получившееся неравенство хочется внести $\frac{1}{2}$ в степень аргумента. Это сделать можно, но тогда x^2-4, надо будет «обрамлять» модулем из-за проблем со знаками: x^2-4, в отличие от $(x^2-4)^2$, может быть отрицательным. Что бы эту вероятность исключить - ставят модуль. Мы пойдем более хитрым путем: умножим на 2 все неравенство.
$\log_2\left(x^2-4\right)^2 + 2\log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0$	Внесем двойку в степень аргумента второго логарифма.
$\log_2\left(x^2-4\right)^2 + \log_2 \left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)^2 > 0$	Воспользуемся свойством: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$
$\log_2\left(\left(x^2-4\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)^2\right) > 0$	И дорешаем неравенство.
$\left(x^2-4\right)^2 \cdot \frac{(x-1)^2}{(x^2-4)^2} > 1$ $(x-1)^2 > 1$ $(x-1)^2 - 1 > 0$ $(x-1-1)(x-1+1) > 0$ $(x-2)x > 0$	
 	Запишем ответ с учетом ограничений.
Ответ: $(-2;0) \cup (2;\infty)$	

Выводы из решения 17 задачи:

- В неравенствах и уравнениях лучше пользоваться расширенными формулами:

$$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1,\ bc > 0$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 0,\ \frac{b}{c} > 0$$
$$\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_{|a|} |b|, \quad \text{где } b^m > 0,\ a^k > 0,\ a^k \neq 1$$

- Обратите внимание, что при использовании формул в обратную сторону (когда мы не разъединяем логарифм, а соединяем его) - никакие модули не нужны:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \text{ где } a > 0,\ b > 0, c > 0,\ a \neq 1$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \text{ где } a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1$$

63. $\log_2 \left(x^2 + 4x\right) + \log_{0,5} \dfrac{x}{4} + 2 \geq \log_2 \left(x^2 + 3x - 4\right)$

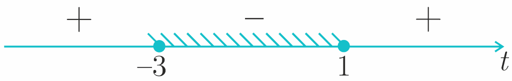
64. $2\log_2 \dfrac{x+1}{x+1,5} + \log_2 (x+1,5)^2 \geq 2$

65. $\log_5 (2+x)(x-5) > \log_{25} (x-5)^2$

66. $9\log_7 \left(x^2 + x - 2\right) \leq 10 + \log_7 \dfrac{(x-1)^9}{x+2}$

Задача 18. Решите неравенство:

$4\log_4^2 (-\log_3 x) - \log_{0,5} \log_3^2 x \leq 3$	Найдем ограничения.
Ограничения: $\begin{cases} -\log_3 x > 0 \\ \log_3^2 x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $x \in (0; 1)$	
Решение: $4\log_4^2 (-\log_3 x) - \log_{0,5} \log_3^2 x \leq 3$	Чтобы как-то сориентироваться в этом логарифмическом безумии, найдем что-то общее в двух логарифмах. Смотрим на основания и замечаем, что они связаны: оба являются степенью двойки, ведь $4 = 2^2$, а $0,5 = 2^{-1}$. Это надо использовать. В первом логарифме представим 4 как 2^2 и, воспользовавшись свойством, вынесем двойку из показателя степени. Однако обратите внимание на важный момент: так как логарифм $\log^2{}_4 (-\log_3 x)$ стоит в квадрате весь целиком, то вынесенная двойка тоже будет возводиться в квадрат: $4\log_4^2 (-\log_3 x) = 4\left(\log_{2^2} (-\log_3 x)\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\log_2 (-\log_3 x)\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}\log_2^2 (-\log_3 x) = \log_2^2 (-\log_3 x)$. Во втором логарифме 0,5 представим как 2^{-1} и вынесем -1.

$\log_2^2(-\log_3 x) + \log_2 \log_3^2 x \le 3$	Теперь самая интересная часть решения: преобразовываем второй логарифм в левой части, то есть $\log_2 \log_3^2 x$. Сначала банально снимаем квадрат с аргумента, не забыв при этом «надеть» модуль на него, чтобы гарантировать положительность $\log_3 x$.
$\log_2^2(-\log_3 x) + 2\log_2 \lvert\log_3 x\rvert \le 3$	А сейчас самое время вспомнить про ограничения, в котором ясно сказано, что $\log_3 x < 0$. Из чего напрямую следует, что $\lvert\log_3 x\rvert = -\log_3 x$. Не очевидно? Смотрите, модуль должен раскрываться положительно - это его основное свойство. $\log_3 x$ - отрицательное число по ограничению. Какой знак надо добавить к отрицательному числу, чтобы оно стало положительным? Конечно, минус.
$\log_2^2(-\log_3 x) + 2\log_2(-\log_3 x) \le 3$	Аллилуйя! Слава богам математики, наконец-то можно делать замену $t = \log_2(-\log_3 x)$.
$t = \log_2(-\log_3 x)$	
$t^2 + 2t - 3 \le 0$	Дальше все как обычно: метод интервалов и переход к системе.
$(t+3)(t-1) \le 0$	
 $\begin{cases} t \ge -3 \\ t \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2(-\log_3 x) \ge -3 \\ \log_2(-\log_3 x) \le 1 \end{cases}$	Решить неравенство, в котором есть логарифм в логарифме – это все равно, что решить два логарифмических неравенства подряд. Начинаем всегда с внешнего логарифма.
$\begin{cases} -\log_3 x \ge 2^{-3} \\ -\log_3 x \le 2^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_3 x \le -\dfrac{1}{8} \\ \log_3 x \ge -2 \end{cases}$	
$\begin{cases} x \le 3^{-\frac{1}{8}} \\ x \ge 3^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \\ x \ge \frac{1}{9} \end{cases}$	Запишем ответ.
Ответ: $\left[\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right]$	

Выводы из решения 18 задачи:

- Квадрат в аргументе логарифма можно снять, НЕ добавляя модуль, если точно известен знак аргумента.
- $\log_b^n a$ - это более краткая запись $(\log_b a)^n$. Все свойства логарифма надо применять с учетом этого.

67. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2\left(x^2-9\right)-2\right) \ge 0$

68. $\log_3(x+1) \le \log_3 x + \log_9(x+2)^2$

69. $\log_3^2 |x| - \log_3 \dfrac{x^2}{3} \ge \left(\dfrac{1}{3}\log_3(27|x|)\right)^2$

70. $\log_4^3 x - 3 + 0,25\log_4^2 x^2 + 4\log_{0,25} x \ge 1$

71. $\log_{49}(x+4) + \log_{x^2+8x+16}\sqrt{7} \le -\dfrac{3}{4}$

72. $\log_{|x+1|}^2(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$