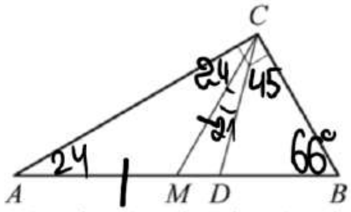
1 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



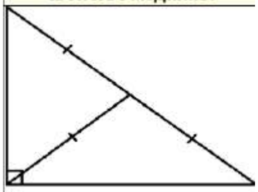
① $\angle A = 180 - 90 - 66 = 24$

② $45 - 24 = 21$

Ответ: 21

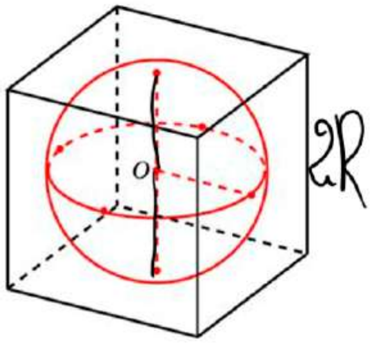
Источники:
Основная волна 2017
Основная волна 2021

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

2 Шар, объем которого равен 35π, вписан в куб. Найдите объём куба.



① $V_ш = 35\cancel{\pi} = \frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3$

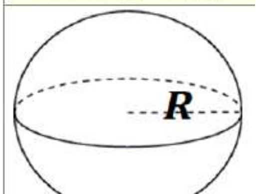
$R^3 = \frac{35 \cdot 3}{4} = \frac{105}{4}$

② $V_к = (2R)^3 = 8R^3 = 8 \cdot \frac{105}{4} = 210.$

Ответ: 210

Источники:
Досрочная волна 2014

ОБЪЁМ ШАРА



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

3

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

11C2CE

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2019
Основная волна 2014
Основная волна 2013

$$P = \frac{6}{\cancel{75}} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

Ответ: 0,08

4

В городе 46% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Источники:

Демо 2022

54 чел
-540 женщ.
460 мужч. } 1000 чел

77 пенсионеров
54 пенс - женщ.
23 пенс - мужч.

$$P = \frac{23}{460} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Ответ: 0,05

5 Найдите корень уравнения $(x+3)^9 = 512$.

F1A1A3

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Досрочная волна 2018
Основная волна 2017

$(x+3)^9 = 2^9$
$x+3=2$
$x=-1$

Ответ: -1

6 Найдите значение выражения $\frac{16\sin 98^\circ \cdot \cos 98^\circ}{\sin 196^\circ}$.

F6B664

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2017

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

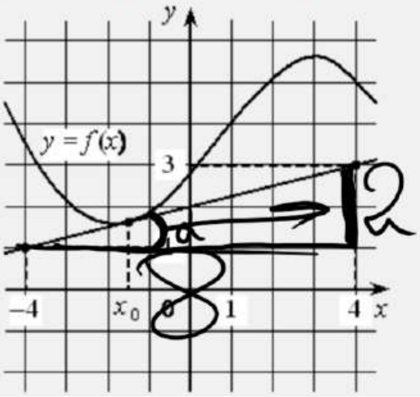
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\frac{16 \cdot \cancel{\sin 98^\circ} \cdot \cancel{\cos 98^\circ}}{2 \cdot \cancel{\sin 98} \cdot \cancel{\cos 98}} = 8$

Ответ: 8

7

На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



C70016

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019

$f'(x_0) = tg\alpha$

Ответ: 0,25

8

Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала наблюдения в секундах, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 1{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$ где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 20 секунд после начала наблюдения. Ответ дайте в джоулях.

9DD340

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

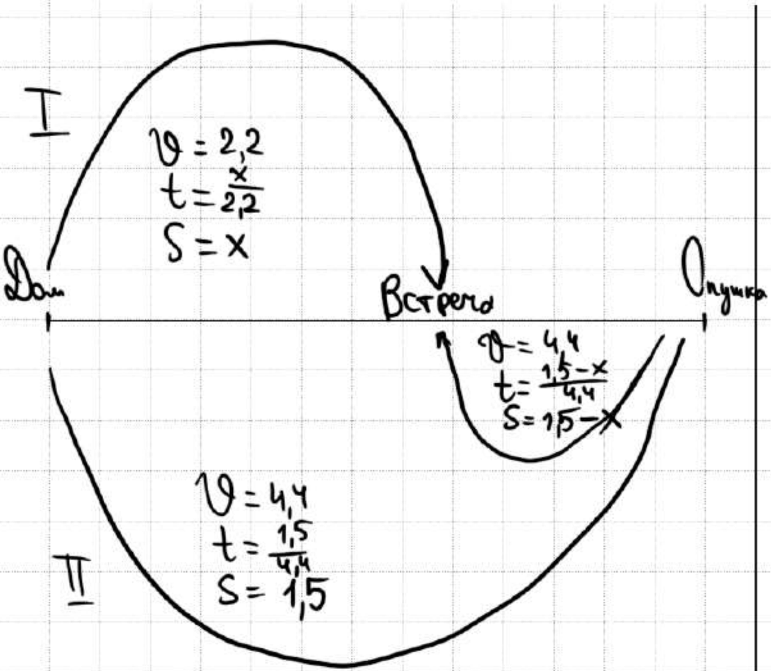
$v = 1{,}5 \cdot \cos \frac{\cancel{2}\pi \cdot 20}{\cancel{2}} = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$

$E = \frac{0{,}16 \cdot 1{,}5^2}{2} = \frac{\cancel{16}^{2} \cdot 3 \cdot 3}{100 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{18}{100} = 0{,}18$

Ответ: 0,18

9 Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от дома. Один идёт со скоростью 2,2 км/ч, а другой — со скоростью 4,4 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2019
Пробный ЕГЭ 2017



$$t^{\text{от дома}}_{\text{до встречи I}} = t^{\text{от дома}}_{\text{до встречи II}}$$

$$\frac{x}{2{,}2} = \frac{1{,}5}{4{,}4} + \frac{1{,}5 - x}{4{,}4} \quad \Big| \cdot 4{,}4$$

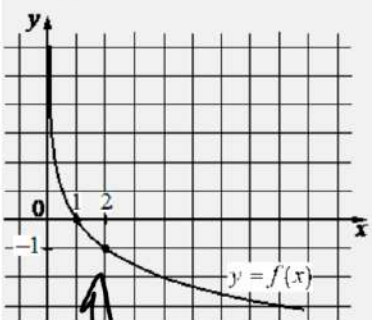
$$2x = 1{,}5 + 1{,}5 - x$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

ОТВЕТ: 1

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



196238

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2022

① $(2; -1)$

$$-1 = \log_a 2$$

$$a^{-1} = 2$$

$$\frac{1}{a} = 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

② $f(16) = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

ОТВЕТ: −4

11 Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+441}{x}$ на отрезке $[2;\ 32]$.

7103B3

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

$C' = 0$
$x' = 1$
$(Cx)' = C$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

① $y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+441) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 441}{x^2} = 0$

$x = 21$ $\quad$ $\cancel{x = -21}$

② $y(21) = 42$

$y(2) = 222{,}5$

$y(32) = \ >42$

Ответ: 4 2

12 а) Решите уравнение

$$4 \cdot 16^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^{x+\frac{1}{2}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2022
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2014

а) $\cancel{4} \cdot \frac{16^x}{\cancel{16^{\frac{1}{2}}}} - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 0$

$16^x - 5 \cdot 12^x + 6 \cdot 9^x = 0 \quad \Big| : 9^x$

$\left(\frac{16}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^x + 6 = 0$

$\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 6 = 0$

Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$

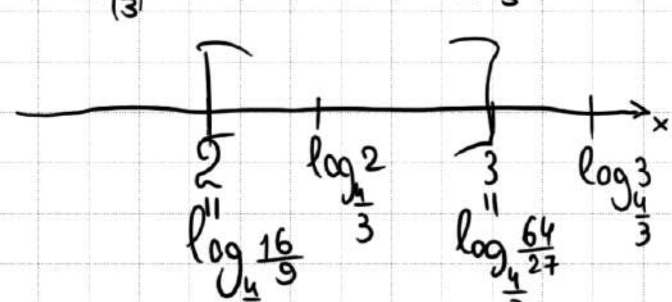
$t^2 - 5t + 6 = 0$

$t = 2$ $\qquad$ $t = 3$

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 2$ $\qquad$ $\left(\frac{4}{3}\right)^x = 3$

$x = \log_{\frac{4}{3}} 2$ $\qquad$ $x = \log_{\frac{4}{3}} 3$

б)



Ответ: а) $\log_{\frac{4}{3}} 2$; $\log_{\frac{4}{3}} 3$
б) $\log_{\frac{4}{3}} 2$

13

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

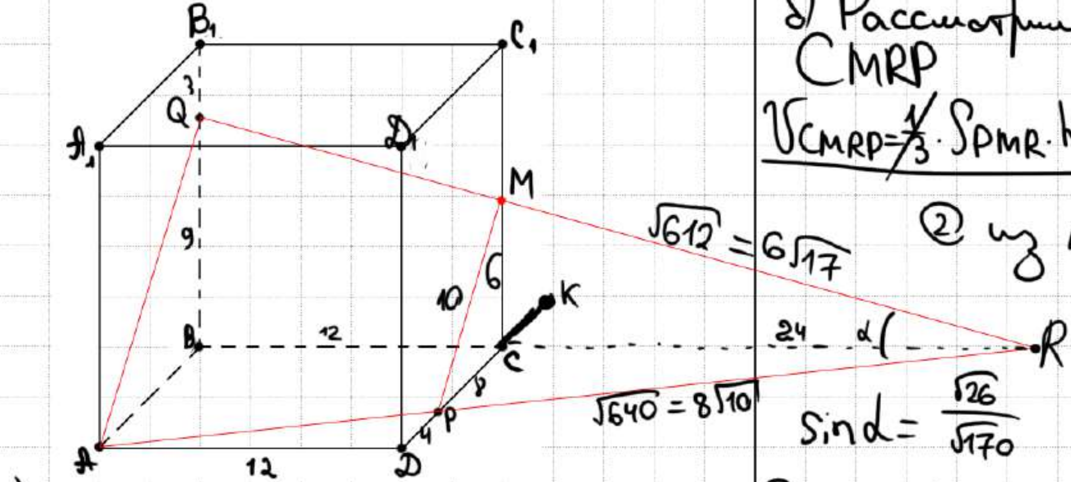
Источники:

Сергеев 2018

Основная волна (Резерв) 2016

Расстояние от точки до плоскости можно найти как высоту пирамиды, выразив объём двумя способами

$V = \frac{1}{3}\cdot S_{BDC_1}\cdot CH = \frac{1}{3}\cdot S_{BCD}\cdot CC_1$



а) ① $\triangle ADP \sim \triangle CPR$ по 2 углам

$\frac{12}{CR} = \frac{4}{8}$ $\quad CR = 24$

② $\triangle QBR \sim \triangle CMR$ по 2 углам

$\frac{9}{CM} = \frac{36}{24}$ $\quad CM = 6$

$\Rightarrow M$ – середина CC_1 ■

б) ① Рассмотрим пирамиду $CMRP$

$V_{CMRP} = \cancel{\frac{1}{3}}\cdot S_{PMR}\cdot h = \cancel{\frac{1}{3}} S_{CPR}\cdot CM$

② из $\triangle PMR$ по т. cos:

$\cos\alpha = \frac{612+640-100}{2\cdot 8\sqrt{10}\cdot 6\sqrt{17}} = \frac{\cancel{1152}}{\cancel{2\cdot 96}\sqrt{170}} = \frac{12}{\sqrt{170}}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$

$S_{PMR} = \frac{1}{2}\cdot 8\cancel{\sqrt{10}}\cdot 6\cancel{\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\cancel{\sqrt{170}}} = 24\sqrt{26}$

③ $\cancel{24}\sqrt{26}\cdot h = \frac{8\cdot\cancel{24}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{6}\,3$

$h = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{24\sqrt{26}}{26} = \frac{12}{13}\sqrt{26}$

Ответ: $\frac{12}{13}\sqrt{26}$

14

Решите неравенство $\log_2^2\left(16+6x-x^2\right)+10\log_{0,5}\left(16+6x-x^2\right)+24>0.$

Источники:

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2015

ED0B2A

$\log_2^2(16+6x-x^2) - 10\cdot\log_2(16+6x-x^2)+24>0$

Пусть $\log_2(16+6x-x^2) = t$

$t^2-10t+24>0$

$+\quad 4 \quad - \quad 6 \quad +\quad t$

$\left[\begin{array}{l} t<4 \\ t>6 \end{array}\right.$

$\log_2(16+6x-x^2) < \log_2 16 \qquad \log_2(16+6x-x^2) > \log_2 64$

$0<16+6x-x^2<16 \qquad 16+6x-x^2>64$

① $16+6x-x^2>0$ $\qquad x^2-6x+48<0$

② $16+6x-x^2<16$ $\qquad (x^2-6x+9)+39<0$

$(x-3)^2+39<0$

нет реш.

① $x^2-6x-16<0$

$+\quad -2 \quad - \quad 8 \quad +\quad x$

② $x^2-6x>0$

$x\cdot(x-6)>0$

$+\quad 0 \quad - \quad 6 \quad +\quad x$

Найдём пересечение ① и ②

$-2 \quad 0 \quad 6 \quad 8 \quad x$

Ответ: $(-2;0)\cup(6;8)$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x — **целое** число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Источники:
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2020
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

Пусть Я21 – месяц откр. вклада
Дек – месяц начисл. %

	Дата	Сумма вклада
1	Я21	10
	Д21	$10\cdot 1{,}1$
2	Я22	ничего не происходит
	Д22	$10\cdot 1{,}1^2$
3	Я23	$10\cdot 1{,}1^2+x$
	Д23	$10\cdot 1{,}1^3+x\cdot 1{,}1$
4	Я24	$10\cdot 1{,}1^3+x\cdot 1{,}1+x$
	Д24	$10\cdot 1{,}1^4+1{,}1^2\cdot x+1{,}1x-10-2x>7$

$$2{,}31\cdot x-2x>17-14{,}641$$
$$0{,}31\cdot x>2{,}359$$
$$x>\frac{2359\cdot\cancel{100}}{\cancel{1000}\cdot 31}$$
$$x>\frac{2359}{310}$$
$$x>7\frac{189}{310}$$
$$x_{наим}=8$$

$$\begin{array}{r|l} 2359 & 310 \\ \hline 2170 & 7 \\ \hline 189 & \end{array}$$

Ответ: 8

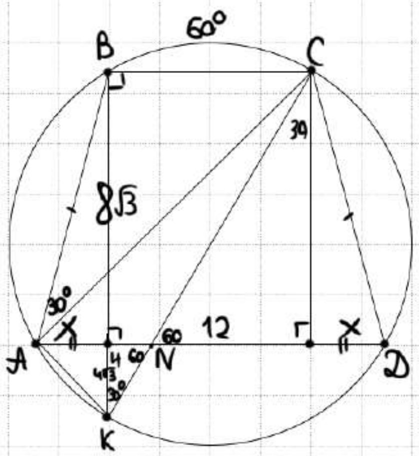
16

В окружность вписана трапеция $ABCD$, AD — большее основание, проведена высота BH, вторично пересекающая окружность в точке K.

Источники:
Основная волна 2021

а) Докажите, что AC перпендикулярна AK.

б) Найдите AD, если радиус описанной окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, CK пересекает основание AD в точке N. Площадь четырёхугольника $BHNC$ в 8 раз больше, чем площадь треугольника KHN.



а) ① $ABCD$ – р/б трапеция (т.к. вписана в окр.)

② $\angle CBK = 90°$

$\smile CK = 180°$

$\angle CAK = 90°$

(по т. о впис. угле)

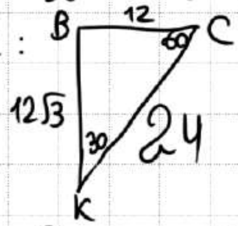
$AC \perp AK$ ■

б) ① CK – диаметр

$CK = 24$

② $\angle BAC = 30° = \angle BKC$

③ $\triangle BKC$:



④ Пусть $S_{KHN} = S$

$S_{BCNH} = 8S$

Тогда $S_{BKC} = 9S$

$\frac{S_{BCK}}{S_{KNH}} = 9 \Rightarrow k = 3$

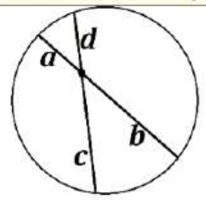
$NH = 4$

$KH = 4\sqrt{3}$

$KN = 8$

⑤ по св-ву хорд AD и BK

СВОЙСТВО ХОРД



$a \cdot b = c \cdot d$

$x \cdot (12 + x) = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$

$x^2 + 12x - 96 = 0$

$D = 144 + 384 = 528 = (4\sqrt{33})^2$

$x = \frac{-12 \pm 4\sqrt{33}}{2}$

$x = -6 + 2\sqrt{33}$

$AD = 12 + 2x = \cancel{12} - \cancel{12} + 4\sqrt{33} = 4\sqrt{33}$

Ответ: $4\sqrt{33}$

17

Найдите все значения a, при которых уравнение

$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

Источники:

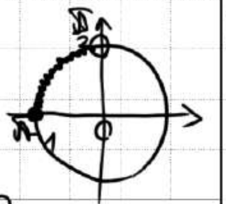
FIPI (старый банк)

Основная волна (Резерв) 2013

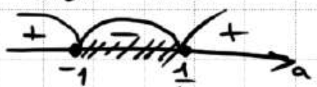
$$\left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ \cancel{\sin^2 x} + 2\cos x + a = \cancel{\sin^2 x} + \cos x - a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \\ (2)\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ -\sin^2 x - 2\cos x \cancel{-a} = \sin^2 x + \cos x \cancel{-a} \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases} \cos x = -2a \\ 1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

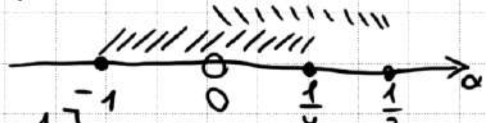
$\begin{cases} \cos x = -2a \\ -4a^2 - 4a + a + 1 \geq 0 \\ -1 \leq -2a < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} \cos x = -2a \\ -4a^2 - 3a + 1 \geq 0 \quad \cdot(-1) \\ 0 < a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x = -2a \\ 0 < a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$



Найдём пересечение:



$\Rightarrow$ при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$ есть 1 решение x у первой системы

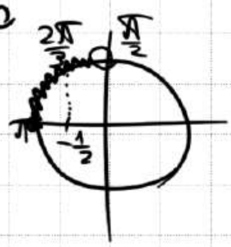
(2) $\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ 2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

Решим уравнение: $2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$

$\cos x = 2$ $\varnothing$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$



$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + a < 0 \end{cases}$

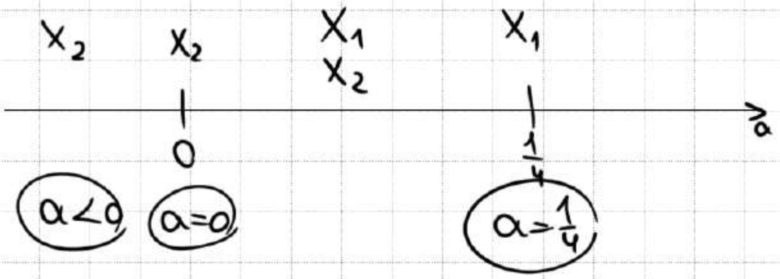
$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ a < -\frac{3}{4} + 1 \end{cases}$

при $a < \frac{1}{4}$ есть 1 решение у второй системы

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Пусть x_1 – корень первой системы

x_2 – корень второй системы



18 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

Источники: Основная волна 2015

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

а) 29л 32л 40л 91л
1 2 3 4

$\frac{29+32+40+91}{4} = 48$ (л)

Перельём 19л из 4-ой в 1-ую
16л из 4-ой во 2-ую
8л из 4-ой в 3-ью

б) 1л 1л 1л 1л 1л 1л 8л

Для приведённого выше примера нужно как минимум 6 переливаний т.к. до 2л не хватает в 6 бочках.

в)

ОТВЕТ: а) Да
б) Нет
в)

в) ① Меньше, чем за 25 переливаний может не получиться

1л 1л 1л 1л ... 1л 1л 1л 27л

25 1л бочек

26 бочек

Для данного примера нужно 25 переливаний

⇒ Искомое кол-во переливаний ≥25

② Докажем, что 25 переливаний всегда хватит

Пусть 26x - общий объём воды во всех 26 бочках
x - сколько воды должно оказаться в каждой

Если во всех 26 бочках сразу по x воды, то переливаний не нужно
Если в 25 бочках сразу по x воды, то в 26-й бочке тоже x воды и переливаний не нужно
Если в 24 бочках сразу по x воды, то в оставшихся двух: меньше чем x, больше чем x, то нужно 1 переливание
Если в 23 бочках сразу по x вода, то в оставшихся трех: меньше чем x, меньше чем x, больше чем x, то нужно 2 переливания
...
Если в 19 бочках сразу по x воды, то в оставшихся семи: меньше чем x, меньше чем x, больше чем x, больше чем x, больше чем x, больше чем x, больше чем x — нужно ≤6 переливаний
...
Если в 0 бочек сразу по x воды, то в оставшихся 26: нужно ≤ 25 переливаний