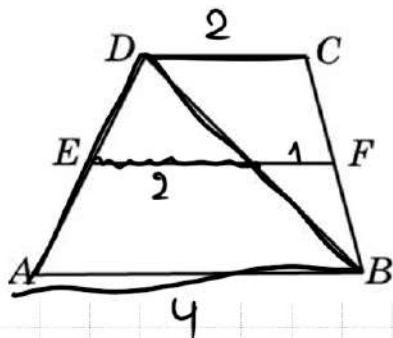


1

Основания трапеции равны 2 и 4. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Источники:

Досрочная волна 2021
Досрочная волна (Резерв) 2019

ОТВЕТ: 2

2

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса.



Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

2A5773

$$\begin{aligned} (50\sqrt{2})^2 &= R^2 + R^2 \\ 50^2 \cdot 2 &= 2R^2 \\ R &= 50 \end{aligned}$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2013

ОТВЕТ: 50

3

В группе туристов 300 человек. Их вертолѐтом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолѐт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолѐта.

$$p = \frac{15}{300} = \frac{5}{100} = 0,05$$

ОТВЕТ: 0,05

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Основная волна 2018

4

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.



788827

Источники:

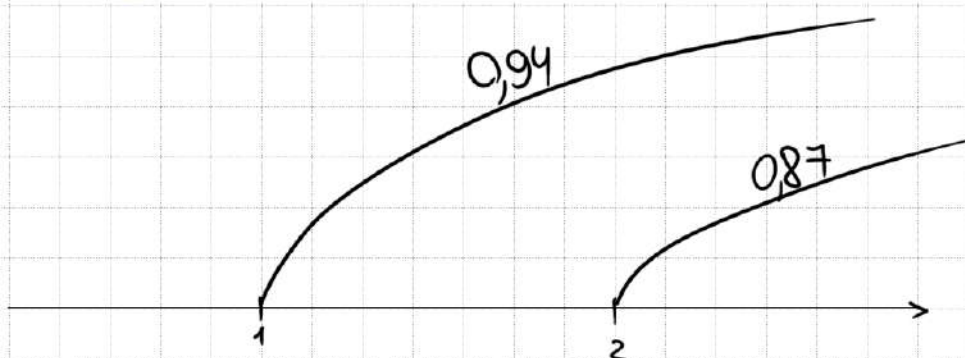
ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Демо 2022

Демо 2021

Досрочная волна 2016



$$0,94 = x + 0,87$$

$$x = 0,07$$

ОТВЕТ: 0,07

5

Решите уравнение $\sqrt{40 + 3x} = x$.

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

22809B

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2021
 Пробный ЕГЭ 2014

~~40 + 3x = x^2~~

$$40 + 3x = x^2$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$x_1 = 8$$

~~$$x_2 = -5$$~~

ОТВЕТ: 8

6

Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}.$$

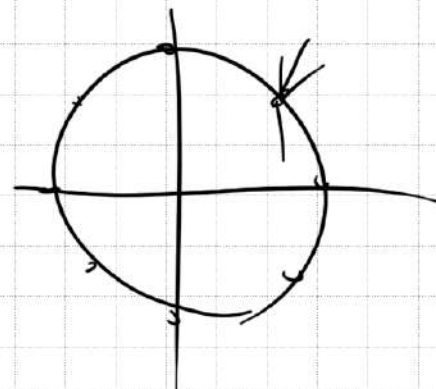
$$3\sqrt{2} \cdot \left(\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sin^2\frac{9\pi}{8} \right)$$

$$3\sqrt{2} \cdot \cos\frac{18\pi}{8}$$

$$3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

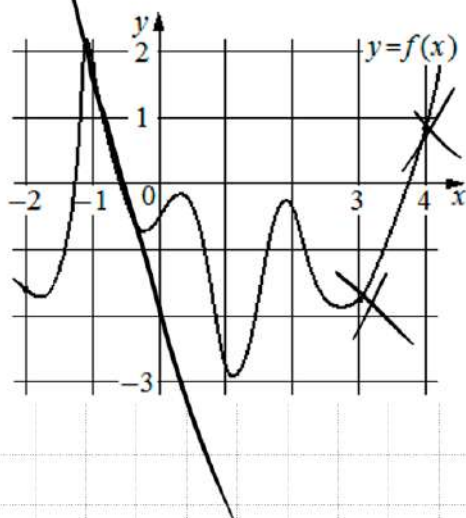
Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2021
 Основная волна 2017
 Пробный ЕГЭ 2014
ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

**ОТВЕТ:** 3

7

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2020
Досрочная волна 2018

ОТВЕТ: - 1

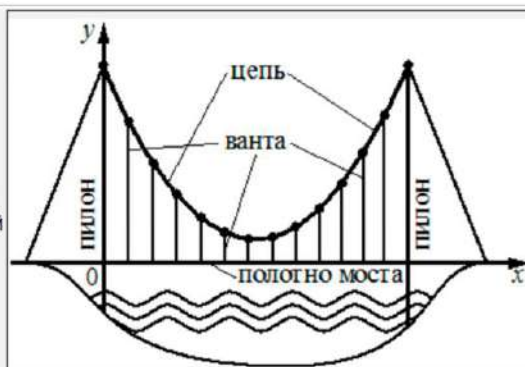
8

На рисунке изображена схема моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются ваннами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0043x^2 - 0,74x + 35,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



7D7F1D

Источники:

ФИПИ (старый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2018

$$y = \frac{43}{10000} \cdot 70 \cdot 70 - \frac{74}{100} \cdot 70 + 35$$

$$\frac{2107}{100} - \frac{5180}{100} + 35$$

$$21,07 - 51,8 + 35$$

$$56,07 - 51,80 = 4,27$$

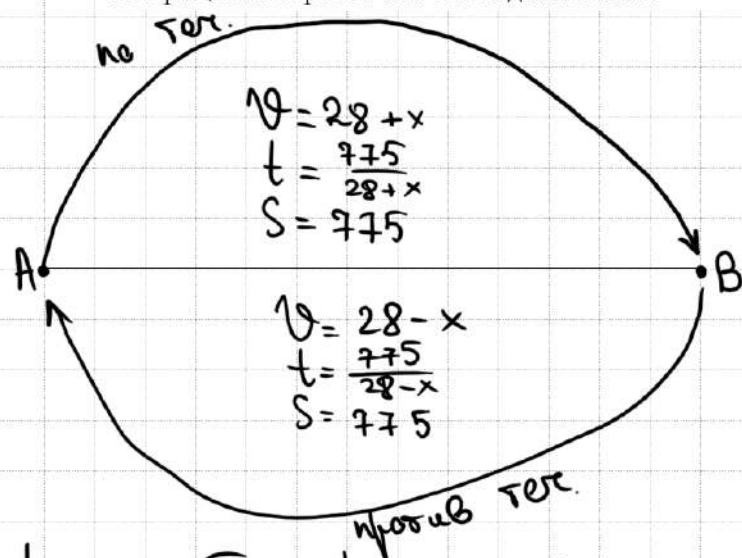
ОТВЕТ: 4,27

9

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 775 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 28 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 61 час. Ответ дайте в км/ч.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2020
Основная волна 2017



$$\frac{56 \cdot 775}{784 - x^2} = 56 \cdot 1 \quad | : 56$$

$$784 - x^2 = 775$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$t \rightarrow + 5 + t \leftarrow = 61$$

$$\frac{775}{28+x} + \frac{775}{28-x} = 56$$

$$\frac{775 \cdot 28 - 775x + 775 \cdot 28 + 775x}{784 - x^2} = 56$$

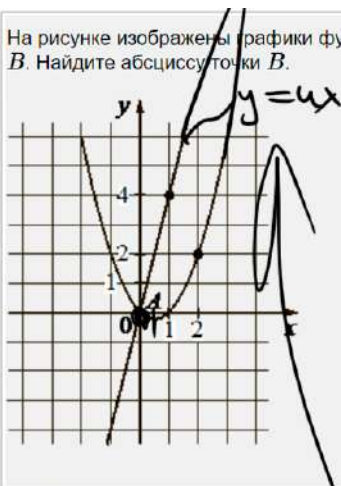
ОТВЕТ: 3

10

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

Источники:

ФИПИ (старый банк)



E18EA6

$$\textcircled{1} a = 1$$

$$c = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{b}{2} \quad b = -1$$

$$y = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 0$$

$$\textcircled{2} x^2 - x = 4x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot (x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 5$$

ОТВЕТ: 5

11

Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 10)^2 x + 2$ на отрезке $[-11; -4]$.

Источники:

ФИПИ (старый банк)

8BE2C6

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y &= (x^2 + 20x + 100) \cdot x + 2 \\ y &= x^3 + 20x^2 + 100x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= 3x^2 + 40x + 100 = 0 \\ D &= 1600 - 1200 = 400 = 20^2 \\ x &= \frac{-40 \pm 20}{6} \\ x &= -10 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad y(-11) &= -9 \\ y(-10) &= 2 \\ y(-4) &= - \dots \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 2

12

а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 - \cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\sin x}{\cos x + 1} - \frac{1}{1} + \frac{\cos x}{1} &= 0 \\ \frac{\sin x - \cos x - 1 + \cos^2 x + \cos x}{\cos x + 1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x + 1} = 0$$

$$\frac{\sin x \cdot (1 - \sin x)}{\cos x + 1} = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{cases}$$

ОТВЕТ:

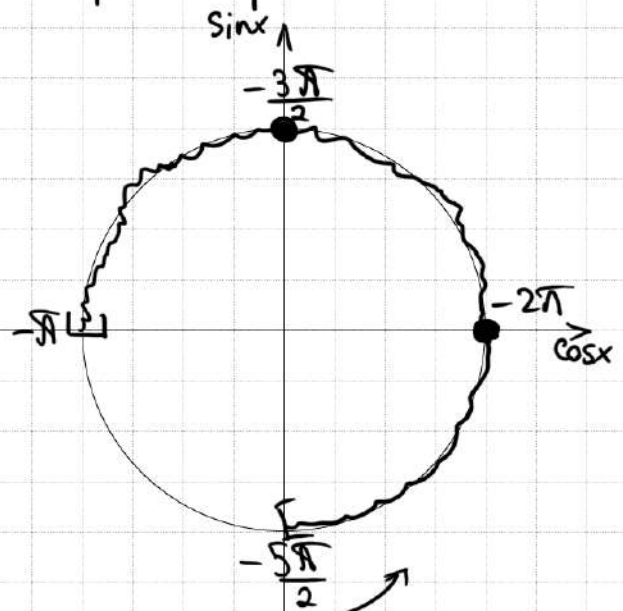
$$\begin{aligned} \text{а) } &2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) } &-2\pi; -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Источники:

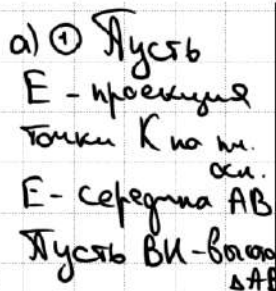
Досрочная волна 2018

$$\begin{aligned} \text{Получаем } x &= 2\pi n \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

б) Отберём корни с помощью окр.



б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.



(E и M - сегменты строки)

KM $\perp$ AC
(maximized)

$$\arctg \frac{\sqrt{530}}{53}$$

8) Пусть OM - перпендикуляр
 $\angle OKM$ - искомый

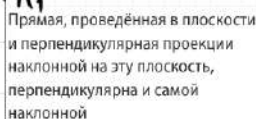
② $OM \perp (ABB_1)$ т.к. $OM \perp AB$
 $\Rightarrow \angle KOM = 90^\circ$ $OM \perp AA_1$
 Прямоугольный

③ Рассмотрим $\triangle ABC$:

$$E = \sqrt{5 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{4} \quad \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5} \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \sqrt{106}} = \frac{2\sqrt{530}}{106}$$

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И
ПЛОСКОСТЬЮ



Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} \right) - \log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} 1 \leq 0$$

$$\textcircled{1} \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} - \frac{1}{1} \right) \leq 0$$

$$\textcircled{2} 1 - \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

$$\textcircled{3} \frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} > 0$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2+5x+8-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \leq 0$$

$$\frac{+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{8x+6}{x^2-3x+2} \geq 0$$

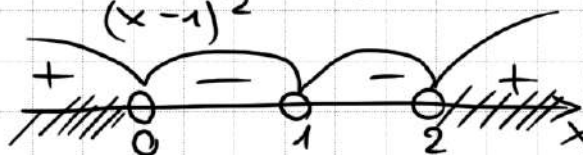


ОТВЕТ: $\left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$

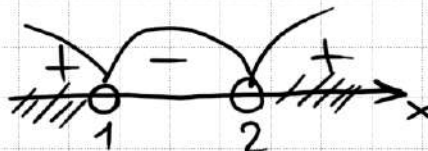
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$$\textcircled{2} \frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2} > 0$$

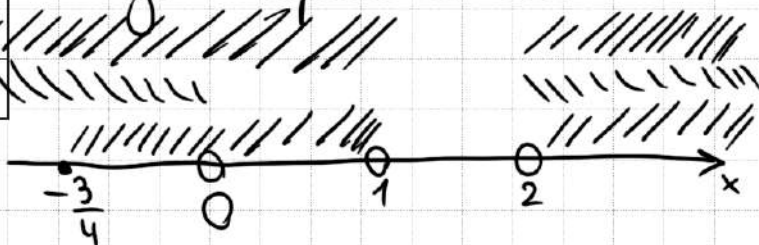
$$\frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} > 0$$



$$\textcircled{3} \frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} > 0$$



Найдём пересечение:



Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят

$3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Источники:

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

Ященко 2018

Пестяков 2017

Досрочная волна 2015

	часы	единицы товара
I	x^2	$3x$
II	y^2	$4y$

$$\textcircled{1} (x^2 + y^2) \cdot 500 = 5000000$$

$$x^2 + y^2 = 10000$$

Выразим y :

$$y^2 = 10000 - x^2$$

$$y = \sqrt{10000 - x^2}$$

$$\text{где } \begin{cases} x \geq 0 \\ 10000 - x^2 \geq 0 \\ x \leq 100 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 100$$

ОТВЕТ: 500

$$\textcircled{2} (3x + 4y)_{\max} = 3x + 4 \cdot \sqrt{10000 - x^2}$$

$$f(x) = 3x + 4 \cdot \sqrt{10000 - x^2}$$

$$f'(x) = 3 + 4 \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2 \sqrt{10000 - x^2}} = 0$$

$$3 = \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}}$$

$$3 \sqrt{10000 - x^2} = 4x$$

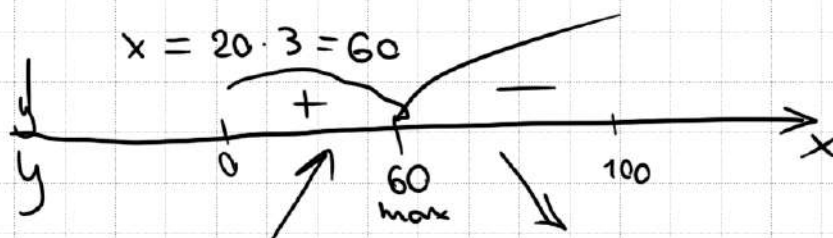
$$\sqrt{10000 - x^2} = \frac{4}{3}x$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x \geq 0 \\ 10000 - x^2 = \frac{16}{9}x^2 \end{cases}$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 10000$$

$$x^2 = \frac{10000 \cdot 9}{25} = 400 \cdot 9$$

$$x = 20 \cdot 3 = 60$$

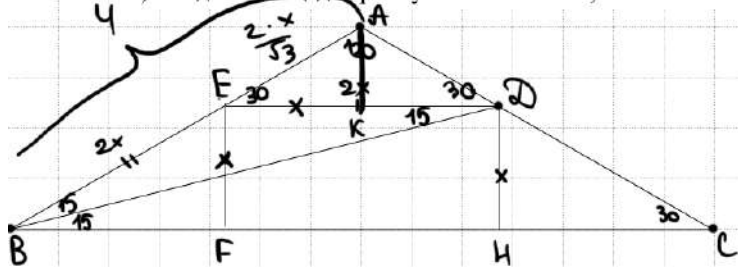


$$y(60)_{\max} = 3 \cdot 60 + 4 \cdot \sqrt{10000 - 3600} = 180 + 320 = 500$$

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона HF лежит на отрезке BC , а вершина E — на отрезке AB .

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.



а) ① $\triangle ABD$: $\angle BDA = 180 - 15 - 120 = 45$
 $\angle BDE = 45 - 30 = 15$

$\triangle BDE$ — равнобедренный

Пусть $EF = x$

Тогда $BE = 2x$ (т.к. EF лежит на отрезке AB угла 30°)

$DE = BE = 2x$

$ED = 2EF$

$\Rightarrow FH = 2DH$

ОТВЕТ:

$24 - 12\sqrt{3}$

б) ① $\triangle AEC$:

$\cos 30^\circ = \frac{x}{EA}$

$AE = \frac{x \cdot 2}{\sqrt{3}}$

② $AB = 2x + \frac{2x}{\sqrt{3}} = 4 \quad | \cdot \sqrt{3}$

$2\sqrt{3}x + 2x = 4\sqrt{3} \quad | : 2$

$\sqrt{3}x + x = 2\sqrt{3}$

$x \cdot (1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}$

③ $S_{DEFH} = x \cdot 2x = 2x^2 = 2 \cdot (3-\sqrt{3})^2$
 $= 2 \cdot (9 - 6\sqrt{3} + 3) = 24 - 12\sqrt{3}$

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$\log_{1-x}(a-x+2) = 2$

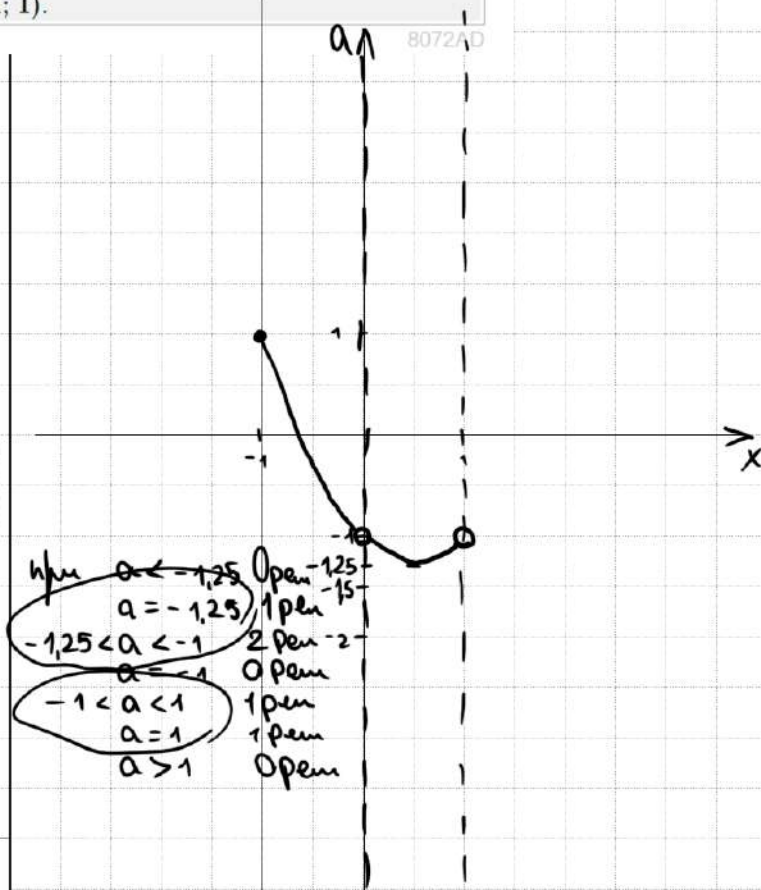
имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

$$\begin{cases} (1-x)^2 = a-x+2 \\ 1-x > 0 \\ 1-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x+x^2 = a-x+2 \\ 1-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x^2 - x - 1 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 = \frac{1}{2} \\ a_0 = -1,25 \end{pmatrix}$$



ОТВЕТ:

$[-1,25; -1) \cup (-1; 1]$

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27} = \frac{226}{54} = \frac{339}{81} = \frac{452}{108} = \dots$

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

а) 339

, т. к. $\frac{339}{81} = \frac{113}{27}$

б) Искомое число это $\frac{125}{27}$

$$\frac{125}{10} \quad \text{X}$$

$$\frac{375}{105} \quad \text{X}$$

$$\frac{625}{60} \quad \text{X}$$

$$\frac{875}{280} \quad \text{X}$$

Нет, т. к. ни один из потенциальных числителей не поделится на 27.
Ответ: б) нет

$$в) \frac{100 \cdot a + 10 \cdot b + c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{P}{27}, \text{ где}$$

P - это число, произведение цифр которого д.б. 27

$$1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$1 \cdot 9 \cdot 3$$

$$3 \cdot 1 \cdot 9$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 9 \cdot 1$$

$$9 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\boxed{9 \cdot 3 \cdot 1}$$

Рассмотрев все варианты для P, найдем, что

$$\frac{931}{27} - \text{наиб. несокр. дробь.}$$

ОТВЕТ:

а) 339

б) нет

в) $\frac{931}{27}$