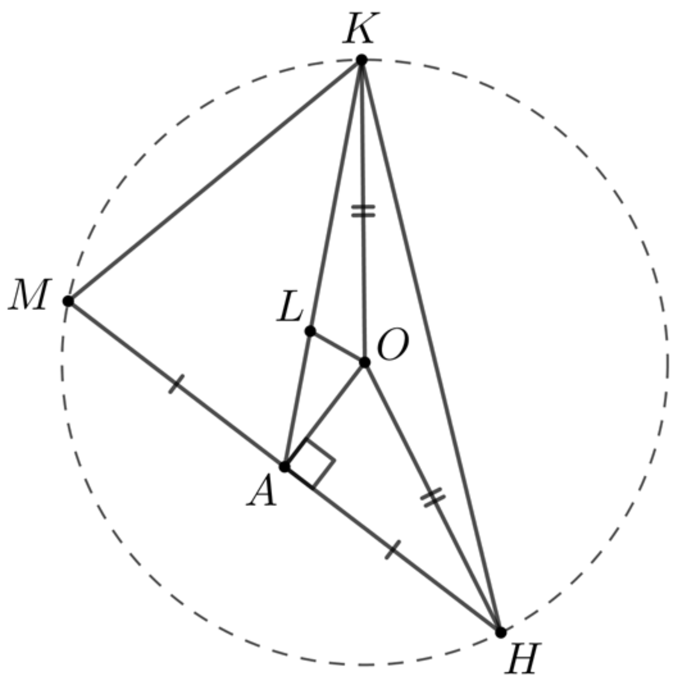
1. Источник: САММАТ 2018, онлайн-этап. Задача 16 из ЕГЭ.

Вокруг треугольника *MKH* описана окружность радиуса r с центров точке *O*. Длина стороны *HM* равна a. Для сторон треугольника выполняется соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найти площадь треугольника OKL, где L – точка пересечения медиан треугольника *MKH*. Ответ записать в виде десятичной дроби, если $a = 4\sqrt{3}, r = 4,(3)$.



Решение.

Заметим, что $4,(3) = 13/3$ и

$$2MH^2 = HK^2 + MK^2.$$

Тогда медиана *KA* найдется по формуле

$$KA = \frac{1}{2}\sqrt{2(HK^2 + MK^2) - MH^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}MH = 6.$$

По свойству точки пересечения медиан, имеем

$$KL = \frac{2}{3}KA = 4.$$

Из прямоугольного треугольника *OAH* находим *OA*:

$$OA = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{OH^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}.$$

Теперь нам известны длины всех сторон треугольника *KAO*, остается найти синус угла *AKO*, а затем искомую площадь треугольника *OKL*. По теореме косинусов для треугольника *KAO*:

$$\cos\angle AKO = \frac{OK^2 + AK^2 - AO^2}{2\cdot OK\cdot AK} = \frac{\frac{169}{9} + 36 - \frac{61}{9}}{2\cdot\frac{13}{3}\cdot 6} = \frac{12}{13},$$

$$\sin\angle AKO = \sqrt{1 - \cos^2\angle AKO} = \frac{5}{13}.$$

Окончательно

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\cdot KL\cdot KO\cdot\sin\angle AKO = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{3}\cdot 4\cdot\frac{5}{13} = \frac{10}{3} = 3,(3).$$

Ответ: 3,(3).

2. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1995, вар. 1.1, №1). Задание №12 из ЕГЭ.

Решить уравнение

$$2\sin 2x \sin 4x + \cos 6x = \sin 3x.$$

Решение.

Используя преобразование $2\sin 2x \cdot \sin 4x = \cos 2x - \cos 6x,$ приведем исходное уравнение к виду $\cos 2x - \sin 3x = 0$. Заменяя $\sin 3x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, последовательно получаем

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0, \qquad 2\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ k, n \in \mathbb{Z}.$

3. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1995, вар. 1.1, №2). Задание №15 из ЕГЭ.

Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счёт в банк «Навроде» под 500% годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной Ф. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, а остальные положил в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк «Вампириал» под 50% годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил $\frac{1}{6}\Phi$, а Буратино – в три раза меньше. Сколько процентов годовых выплачивает банк «Обирон»?

Решение.

Допустим, что Буратино положил в «Обирон» x золотых, а папа Карло – в «Вампириал» y золотых. Тогда их совместный капитал составляет $x + y$. Первоначально они предполагали получить $6(x + y) = \Phi$ золотых. Фактически папа Карло получил $3y/2 = \Phi/6$. Отсюда $y = \Phi/9$, $x + y = \Phi/6$, $x = \Phi/6 - \Phi/9 = \Phi/18$. Буратино получил в три раза меньше папы Карло, то есть $\frac{1}{6}\Phi: 3 = \Phi/16$. Таким образом, прибыль Буратино составила $\Phi/18 - x = \Phi/18 - \Phi/18 = 0$ золотых.

Ответ: 0%.

4. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1995, вар. 1.1, №3). Задание №12 из ЕГЭ.

Решить уравнение

$$81 \cdot 2^{x(x-1)} = 4 \cdot 3^{2x}.$$

Решение.

Приведем исходное уравнение к виду $2^{x(x-1)-2} = 3^{2(x-2)}$. Логарифмируя по основанию 2, получаем

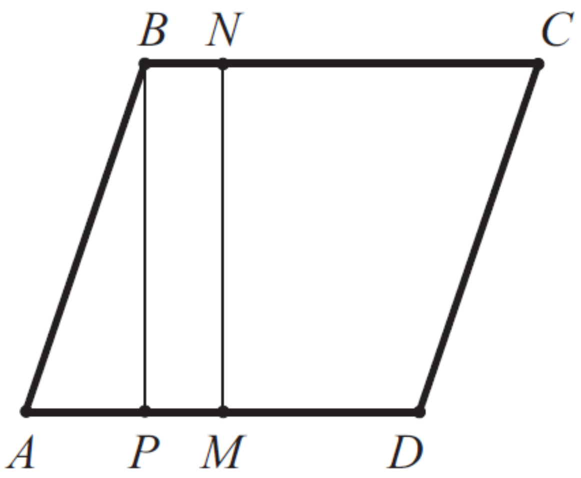
$$x(x-1) - 2 = 2(x-2)\log_2 3, \qquad (x+1)(x-2) = 2(x-2)\log_2 3.$$

Следовательно, имеются две возможности: либо $x = 2$, либо $x + 1 = 2\log_2 3$ и $x = \log_2 9 - 1$.

Ответ: $2, \log_2 9 - 1$.

5. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1995, вар. 1.1, №4). Задание №16 из ЕГЭ.

Через середину стороны ромба перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая пересекает противоположную сторону и делит ромб на части, площади которых равны 12 и 27. Найти сторону ромба.



Решение.

Пусть M – середина основания AD данного ромба, MN и BP перпендикулярны AD. Положим $AB = AD = 2x$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда

$$AP = 2x\cos\alpha, \qquad AM = MD = x,$$

$$BN = AM = AP = x - 2x\cos\alpha,$$

$$NC = BC - BN = x + 2x\cos\alpha,$$

$$BP = 2x\sin\alpha.$$

По условию задачи имеем

$$S_{ABNM} = \frac{1}{2}BP(AM + BN) = 2x^2(1 - \cos\alpha)\sin\alpha = 12,$$

$$S_{CDMN} = \frac{1}{2}BP(DM + CN) = 2x^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha = 27.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$27 - 27\cos\alpha = 12 + 12\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{5}{13}, \qquad \sin\alpha = \frac{12}{13}, \qquad x = \frac{13}{4}.$$

Ответ: 13/2.

6. (Источник: НГУ, ф.е.н., 1995, вар. 2.1, №1). Задание №12 из ЕГЭ.

Решить уравнение

$$\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{10-x}=\sqrt[3]{3-x}+1$ и возведем в куб обе его части. Получим равносильное уравнение

$$10-x=3-x+3\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+3\sqrt[3]{3-x}+1.$$

Полагая $y=\sqrt[3]{3-x}$, находим $y^2+y-2=0$, $y_1=-2$, $y_2=1$. Следовательно, $\sqrt[3]{3-x_1}=-2, x_1=11$ и $\sqrt[3]{3-x_2}=1, x_2=2$.

Ответ: 11; 2.

7. Источник: ПВГ, 2013, Вариант 4, №3. Задача 14 из ЕГЭ.

Решите неравенство

$$4x+2+\sqrt{4-x}>x^2+\sqrt{x^2-5x+2}.$$

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2-5x+2}>x^2-4x-2,$$

после чего домножим и разделим левую часть на сопряженное выражение:

$$\frac{-(x^2-4x-2)}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x^2-5x+2}}>x^2-4x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x-2)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{x^2-5x+2}+1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-2<0, \\ 4-x\geq 0, \\ x^2-5x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(2-\sqrt{6};\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right].$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{6};\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$.

8. Придумана самостоятельно. Задача 3 из ЕГЭ.

Для участия в конференции, посвященной технологиям электронной коммерции, собрались делегаты из 25 стран, в том числе из России. Найдите вероятность того, что делегат из России будет выступать первым, если известно, что порядок выступления определяется случайным образом.

Решение.

Искомая вероятность найдется как отношение числа делегатов от России к общему числу делегатов:

$$\frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Ответ: 0,04.

9. Придумана самостоятельно. Задача 5 из ЕГЭ.

Найдите корень уравнения $19^{4-4\sqrt{x}} = 1$.

Решение.

$$19^{4-4\sqrt{x}} = 1, \qquad 4 - 4\sqrt{x} = 0, \qquad x = 1.$$

Ответ: 1.

10. Придумана самостоятельно. Задача 6 из ЕГЭ.

Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{2}\sin(-405°)}{2}$.

Решение.

$$\frac{5\sqrt{2}\sin(-405°)}{2} = -\frac{5\sqrt{2}\sin(405° - 360°)}{2} = -\frac{5\sqrt{2}\sin 45°}{2} = -5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = -2{,}5.$$

Ответ: –2,5.