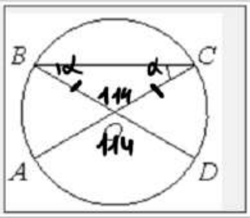
1

Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол AOD равен 114°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



29D9FB

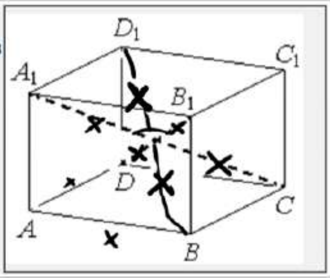
Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна 2016

$$\alpha = \frac{180 - 114}{2} = 33$$

Ответ: 33

2

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 2AD$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



A629B5

Источники:
FIPI (старый банк)

Ответ: 60

3

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

454B44

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2013

ОО
ОР
РО
РР

$$P = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25

4

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

A6402F

Источники:

FIPI (старый банк)

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~

$$P = \frac{2 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Ответ: 0,08

5 Найдите корень уравнения
$5^{\log_{25}(2x-1)} = 3.$

Источники:
Пробный ЕГЭ 2016
Пробный ЕГЭ 2013

$$5^{\log_{25}(2x-1)} = 5^{\log_5 3}$$

$$\frac{1}{2}\log_{5}(2x-1) = \log_5 3$$

$$\log_5 (2x-1)^{\frac{1}{2}} = \log_5 3$$

$$\sqrt{2x-1} = 3$$

$$2x-1 = 9$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Ответ: 5

6 Найдите значение выражения
$\log_{\sqrt[6]{13}} 13.$

Источники:
Основная волна 2019

$$\log_{13^{\frac{1}{6}}} 13 = \frac{1}{\frac{1}{6}} \log_{13} 13 = 6 \cdot 1 = 6$$

Ответ: 6

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017

Ответ: 4

8 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

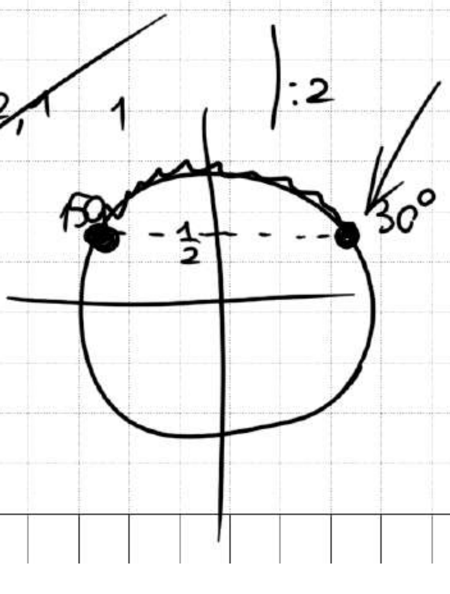
562145

$t \geq 2{,}1$

$\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \geq 2{,}1$

$\frac{2 \cdot \cancel{21} \cdot \sin\alpha}{\cancel{10}} \geq \cancel{2{,}1}\ 1 \quad \Big|:2$

$\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$



Ответ: 30

9 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

716AB2

Источники: FIPI (старый банк)

Пусть S – стоимость акций

$$\cancel{S}\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)=0{,}96\cancel{S}$$

$$1-\left(\frac{r}{100}\right)^2=0{,}96$$

$$\left(\frac{r}{100}\right)^2=0{,}04$$

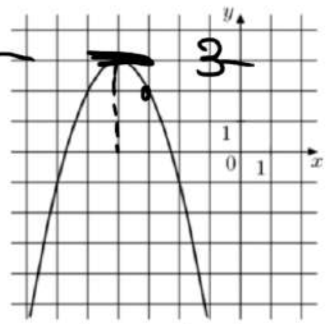
$$\frac{r}{100}=0{,}2$$

$$r=0{,}2\cdot 100=20$$

Ответ: 20

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c – целые. Найдите значение $f(-8)$.

Источники: Демо 2022



① $a=-1$

② $x_0=-4=\frac{-b}{2\cdot a}$ $\quad -4=\frac{-b}{-2}$ $\quad b=-8$

③ $(-3;2)$

$$2=-1\cdot 9+24+c$$

$$c=-13$$

$$y=-1\cdot x^2-8x-13$$

④ $f(-8)=-64+64-13$

Ответ: -13

11

Найдите наибольшее значение функции

$y=\ln(x+6)^3-3x$

на отрезке $[-5{,}5\,;\,0]$.

5095DA

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2019
Основная волна 2018

① $y = 3\cdot \ln(x+6) - 3x$

② $y' = 3\cdot\frac{1}{x+6} - 3 = 0$

$x+6=1$
$x=-5$

③ $y(-5) = 15$
$y(-5{,}5) = \ldots$
$y(0) = \ldots$

Ответ: 15

12

а) Решите уравнение

$$x-3\sqrt{x-1}+1=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3};\sqrt{20}]$.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2018

а) $x+1 = 3\sqrt{x-1}$
$\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$

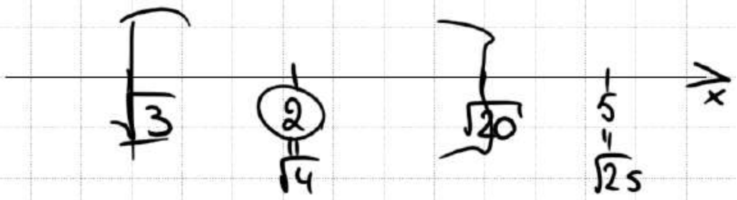
$\begin{cases} ①\ \frac{x+1}{3} \geq 0 \quad |\cdot 3 \\ ②\ x-1 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 \end{cases}$

① $x+1 \geq 0$
$x \geq -1$

② $x-1 = \frac{x^2+2x+1}{9} \quad |\cdot 9$
$9x-9 = x^2+2x+1$
$x^2-7x+10=0$
$x=2 \quad x=5$

Получаем $x=2$
$x=5$

б)



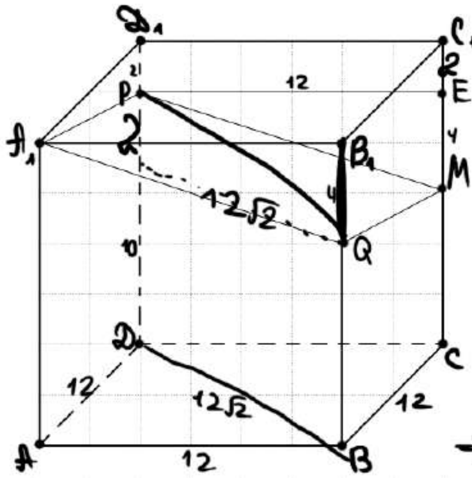
Ответ: а) 2 ; 5
б) 2

13 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

Источники: Основная волна (Резерв) 2016

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.



а) Построение сечения

① Строим A_1P

② Строим A_1Q

③ Строим PM такую, что $PM \parallel A_1Q$

④ Строим MQ

$\Rightarrow A_1PMQ$ - сечение

Построим PE

$PE \parallel C_1D_1 \Rightarrow C_1D_1PE$ - прямоуг.

$\Rightarrow C_1E = 2$

$\triangle A_1B_1Q = \triangle PEM$ по 1 признаку

$\begin{pmatrix} A_1B_1 = PE = 12 \\ A_1Q = PM \\ \angle B_1A_1Q = \angle EPM \end{pmatrix}$

$\Rightarrow EM = 4 = B_1Q$

$\Rightarrow C_1M = 2 + 4 = 6$

$\Rightarrow M$ — середина CC_1 ■

б) $V_{C_1PQM} = V_{PC_1MQ}$

$\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \underset{12\sqrt{41}}{S_{PQM}} \cdot h = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \underset{36}{S_{C_1MQ}} \cdot \overset{12}{PE}$

$S_{C_1MQ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$

$PM = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$QM = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

$PQ = \sqrt{12^2 + 12^2 + 2^2} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$

$\cos\angle PMQ = \frac{160 + 148 - 292}{2 \cdot 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{37}} = \frac{\cancel{16}\ 1}{\cancel{16}\sqrt{370}}$

$\sin\angle PMQ = \frac{\sqrt{369}}{\sqrt{370}}$

$S_{PQM} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{4\sqrt{10}} \cdot \cancel{2\sqrt{37}} \cdot \frac{3\sqrt{41}}{\cancel{\sqrt{370}}} = 12\sqrt{41}$

Получаем:

$\cancel{12}\sqrt{41} \cdot h = 36 \cdot \cancel{12}$

ОТВЕТ: $\frac{36}{\sqrt{41}} = \frac{36\sqrt{41}}{41}$

14

Решите неравенство $\dfrac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \dfrac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \ge \dfrac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}$.

1AE932

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

$$\frac{\log_5 25+\log_5 x}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5 25 + \log_5 x} \ge \frac{6-4\log_5 x}{\log_5^2 x - 4}$$

Пусть $\log_5 x = t$

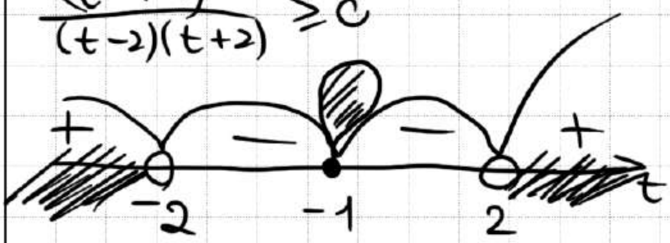
$$\frac{2+t}{t-2}^{\,(t+2} + \frac{t-2}{2+t}^{\,(t-2} - \frac{6-4t}{t^2-4} \ge 0$$

$$\frac{t^2+4t+4+t^2-4t+4-6+4t}{(t-2)(t+2)} \ge 0$$

$$\frac{2t^2+4t+2}{(t-2)(t+2)} \ge 0 \;\Big|:2$$

$$\frac{t^2+2t+1}{(t-2)(t+2)} \ge 0$$

$$\frac{(t+1)^2}{(t-2)(t+2)} \ge 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<-2 \\ t=-1 \\ t>2 \end{array}\right.$$

$\log_5 x < -2$ $\qquad$ $\log_5 x = -1$ $\qquad$ $\log_5 x > 2$

$\log_5 x < \log_5 \frac{1}{25}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $x > 25$

$0 < x < \frac{1}{25}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{25}\right) \cup \left\{\frac{1}{5}\right\} \cup (25; +\infty)$

15

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2015

Пусть $\left(1+\frac{r}{100}\right) = b$

март – месяц платежа

Дата	Сумма долга	
июль	4,5 млн	
1 год я	$4{,}5\cdot b$	
1 год м	⇒ была выплата	$4{,}5b-4$
1 год и	4 млн	
2 год я	$4b$	
2 год м	⇒ была выплата	$4b-3{,}5$
2 год и	3,5 млн	
3 год я	$3{,}5b$	
3 год м	⇒ была выплата	$3{,}5b-3$
3 год и	3	
8 год и	0,5	
9 год я	$0{,}5\cdot b$	
9 год м	⇒ была выплата	$0{,}5b$
9 год и	0	

Ответ: 20

Выплаты образуют убыв. арифм. прогр.

⇒ $4{,}5b-4$ – наиб. платеж

$0{,}5b$ – наим. платеж

$$\begin{cases} 4{,}5b-4 \le 1{,}4 \\ 0{,}5b \ge 0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4{,}5b \le 5{,}4 & \mid :4{,}5 \\ 0{,}5b \ge 0{,}6 & \mid :0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \le 1{,}2 \\ b \ge 1{,}2 \end{cases}$$

$$b = 1{,}2$$

$$1+\frac{r}{100} = 1{,}2$$

$$\frac{r}{100} = 0{,}2$$

$$r = 20\%$$

16

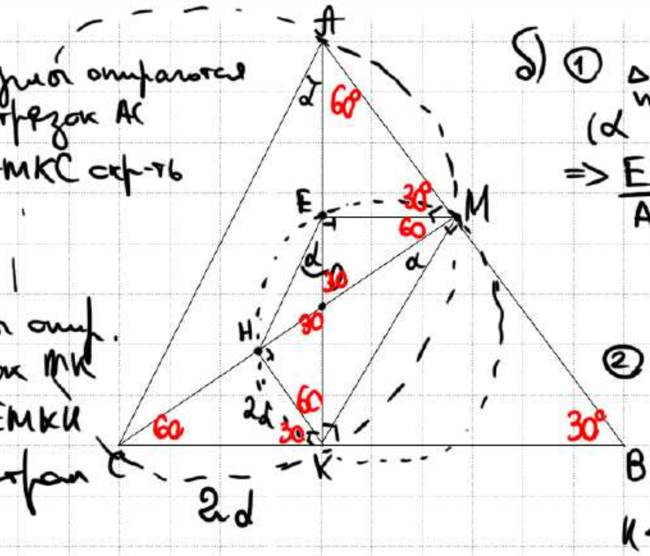
В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 30^\circ$.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2016

250B4D



а) ① $\angle AMC = 90^\circ$ — эти углы опираются
$\angle AKC = 90^\circ$ на отрезок AC

Можно описать около AMKC окр-ть с диаметром AC

② $\angle MEK = 90^\circ$ — эти углы опир.
$\angle MHK = 90^\circ$ на отрезок MK

Можно описать около EMKH окружность с диаметром MK

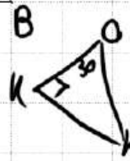
③ Пусть $\angle CAK = \alpha$
Тогда $\smile CK = 2\alpha$
$\angle CMK = \frac{1}{2} \smile CK = \alpha$
$\smile HK = 2\alpha$
$\angle HEK = \frac{1}{2} \smile HK = \alpha$ $\Rightarrow \angle CAK = \angle HEK = \alpha$ (соотв. углы) $\Rightarrow EH \parallel AC$ ■

ОТВЕТ: 3:4

б) ① $\triangle AOC \sim \triangle EOH$ по 2 углам (α и общий)

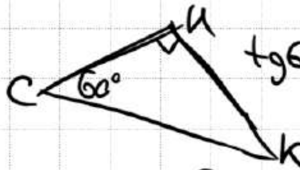
$\Rightarrow \frac{EH}{AC} = k = \boxed{\frac{OH}{OC}}$

② Выразим OH и OC через HK:



$tg\,30^\circ = \frac{HK}{OH}$

$OH = \frac{HK\sqrt{3}}{1}$



$tg\,60^\circ = \frac{HK}{CH}$

$CH = \frac{HK}{\sqrt{3}}$

$OC = \sqrt{3}HK + \frac{1}{\sqrt{3}}HK$

$$\frac{OH}{OC} = \frac{\cancel{HK}\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cancel{HK}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3+1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{4}$$

17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

7DD7DB

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t$ $\qquad t > 0$

Выразим x:

$2^x - a = t^2$

$2^x = t^2 + a$

$x = \log_2(t^2 + a)$

$t + \frac{a-1}{t} = 1$

Найдём при каких это ур-е имеет 2 положительных разных t

$\frac{t}{1} + \frac{a-1}{t} - \frac{1}{1} = 0$

$\frac{t^2 + a - 1 - t}{t} = 0$

Нам нужно, чтобы $t^2 - t + a - 1 = 0$ имело 2 разных положит. корня t.

$D = 1 - 4\cdot(a-1) = 5 - 4a$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$

① $D > 0$
② $t_1 > 0$
③ $t_2 > 0$

① $5 - 4a > 0$
$a < \frac{5}{4}$

Ответ: $\left(1; \frac{5}{4}\right)$

② $\frac{1 + \sqrt{5-4a}}{2} > 0 \quad |\cdot 2$

$1 + \sqrt{5-4a} > 0$

$\sqrt{5-4a} > -1$

$5 - 4a \geq 0$

$a \leq \frac{5}{4}$

③ $\frac{1 - \sqrt{5-4a}}{2} > 0 \quad |\cdot 2$

$1 - \sqrt{5-4a} > 0$

$\sqrt{5-4a} < 1$

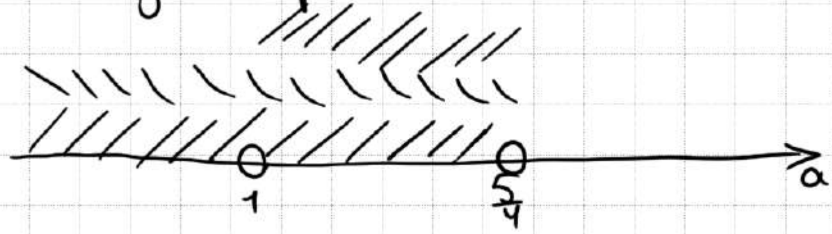
$0 \leq 5 - 4a < 1 \quad |-5$

$-5 \leq -4a < -4 \quad |\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{5}{4} \geq a > 1$

$1 < a \leq \frac{5}{4}$

Найдём пересечение:



18

а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.
б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?
в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

Источники:
Основная волна 2017

а) 1784263

б) Заметим, что в искомом числе девять неповторяющихся цифр от 1 до 9 вкл.

① 1
② девятка левее един => 91 (791)
③ семёрка левее девятки => 791 (791)
④ шестёрка левее семёрки => 6791 (567)
⑤ пятёрка левее шестёрки => 56791 (567)
⑥ тройка левее пятёрки => 356791 (435)

ОТВЕТ:	
	а)
	б)
	в)

НО тройка правее единицы (т.е. правее пятёрки), но у нас есть место только для одной 3
=> нет
Ответ: б) нет

в) ① в числе участвуют все 10 цифр.
② Из-за чисел 11, 22 и 33 наше число как минимум 13-значное
③ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Куда поставить вторую 1?
④ 1 1
(чтобы получить 21 и 31)
Куда поставить 2 и 3?
⑤ 1 2 3 1
Что поставить на 5 и 6 позицию
⑥ 1 2 3 1 2 3
На 7 позицию ставим 4
⑦ 1 2 3 1 2 3 4 0 5 6 7 8 9