Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

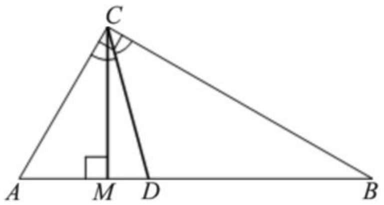
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 23°. Найдите угол между биссектрисой CD и высотой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

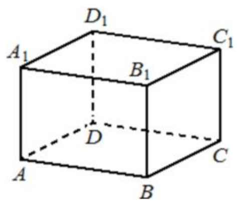


Ответ: ____________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-13; 4)$ и $\vec{b}\,(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: ____________________________.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 31

4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: ____________________________.

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$$

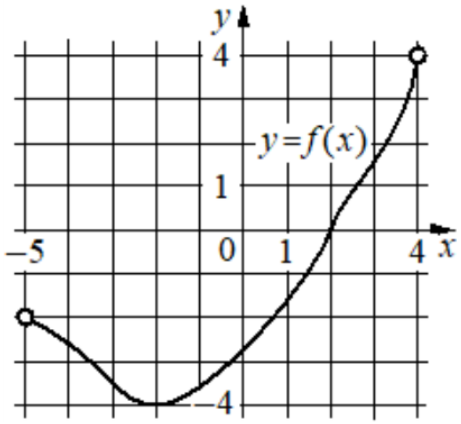
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{8\sin 64^\circ \cdot \cos 64^\circ}{\sin 128^\circ}.$$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



Ответ: ____________________________.

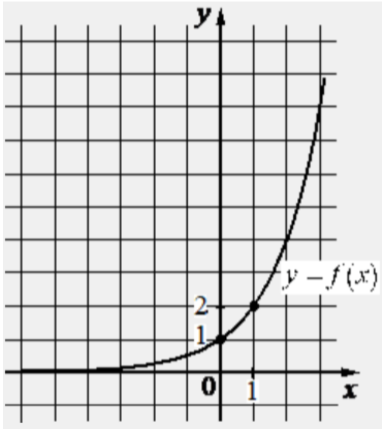
9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/c^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: ____________________________.

10 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции

$y = (x^2 - 17x + 17) \cdot e^{7-x}$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

15 Решите неравенство

$$1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0.$$

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 400 тыс. рублей;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK:KA$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2+y^2) - ax + (a-3)y + 1 = 0, \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	22
2	82
3	30
4	0,75
5	0,6
6	0,4
7	4
8	-2
9	6
10	30
11	8
12	2
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathrm{Z}$ б) $\frac{17\pi}{4}$
14	120
15	$\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; 32) \cup (32; +\infty)$
16	953,6 тыс.
17	$2:3$
18	$(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$
19	а) $-56; -16$ б) 64 в) $6; 8$

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

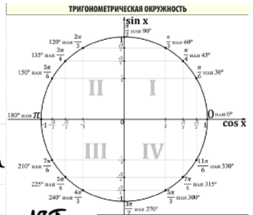
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение $\dfrac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11\sin x}} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

FDA042



ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2024
СтатГрад 29.01.2020
СтатГрад 26.01.2017

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

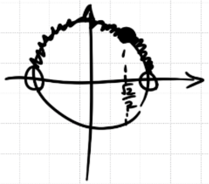
а) $\begin{cases} (3^2)^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x} = 0 \\ 11\cdot\sin x > 0 \quad |:11 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^{4\sin x\cdot\cos x} = 3^{2\sqrt{2}\sin x} \\ \sin x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4\sin x\cdot\cos x - 2\sqrt{2}\sin x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sin x\cdot(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

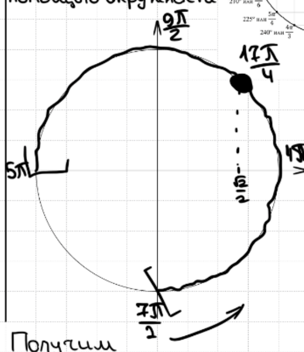
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \sin x > 0 \end{cases}$



Получим
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ. а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
б) $\frac{17\pi}{4}$.

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим
$x = \frac{4\pi}{1} + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

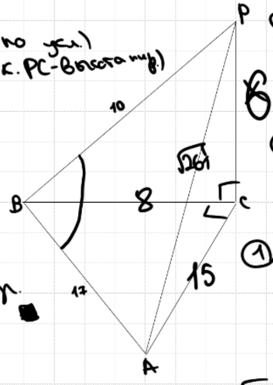
ИСТОЧНИКИ

Гордин #14 2019
Основная волна (Резерв) 2017

а) $BC \perp PA$ (по усл.)
$BC \perp PC$ (т.к. PC-высота пир.)

$BC \perp (PCA)$
по признаку перпенд. прямой и пл-ти

значит
$BC \perp AC$
$\triangle ABC$ - прямоуг. ■



б) ① по т. cos. $\triangle ABP$:
$AP = \sqrt{261}$

② $\begin{array}{l} \triangle ABC: ① \\ \triangle BCP: ② \\ \triangle APC: ③ \end{array} \begin{cases} 289 = AC^2 + BC^2 \\ 100 = PC^2 + BC^2 \\ 261 = AC^2 + PC^2 \end{cases}$

$\begin{array}{l} ①-② \\ ③ \end{array} \begin{cases} AC^2 - PC^2 = 189 \\ AC^2 + PC^2 = 261 \end{cases}$

$2AC^2 = 450$
$AC^2 = 225$
$AC = 15$

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{8\cdot 15}{2}\cdot 6 = 120$

Ответ: 120.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\geq 0.$$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m=m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b=c$, то $a^c=b$

ФСУ	
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-(\log_2 32+\log_2 x^{10})+30}\geq 0$$

$$1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-10\cdot\log_2|x|-5+30}\geq 0$$

x, т.к. $x>0$

Пусть $\log_2 x=t$

$$\frac{1}{1}^{(t^2-10t+25}+\frac{10}{t-5}^{(t-5}+\frac{16}{t^2-10t+25}^{(1}\geq 0$$

$$\frac{t^2-10t+25+10t-50+16}{(t-5)^2}\geq 0$$

$$\frac{t^2-9}{(t-5)^2}\geq 0$$

$+ \quad - \quad + \quad +$

$-3 \quad 3 \quad 5 \quad t$

$$\left[\begin{array}{l} t\leq -3\\ 3\leq t<5\\ t>5\end{array}\right.$$

$\log_2 x\leq\log_2\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\log_2 8\leq\log_2 x<\log_2 32$ $\qquad$ $\log_2 x>\log_2 32$

$0<x\leq\frac{1}{8}$ $\qquad$ $8\leq x<32$ $\qquad$ $x>32$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[8;32)\cup(32;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

$\cdot 1{,}2$

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 400 тыс. рублей;
– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2022

Пусть март - месяц платежа

Дата	Сумма долга
ч 26	700 тыс.
я 27	$700\cdot 1{,}2=840$ тыс.
м 27	была выплата 400 тыс
ч 27	$700\cdot 1{,}2-400$
я 28	$700\cdot 1{,}2^2-400\cdot 1{,}2$
м 28	была выплата 400
ч 28	$700\cdot 1{,}2^2-400\cdot 1{,}2-400$
я 29	$700\cdot 1{,}2^3-400\cdot 1{,}2^2-400\cdot 1{,}2$
м 29	$\Rightarrow$ Б.В. $700\cdot 1{,}2^3-400\cdot 1{,}2^2-400\cdot 1{,}2$
ч 29	0

① Платёж в 2029 году $=\frac{\cancel{700}^{28}\cdot 6^3}{\cancel{5^3}\,5}-\frac{\cancel{400}^{16}\cdot 6^2}{\cancel{5^2}}-\frac{\cancel{400}^{80}\cdot 6}{\cancel{5}}=$

$$=\frac{28\cdot 6^3-16\cdot 5\cdot 6^2-80\cdot 5\cdot 6}{5}=$$

$$=\frac{6\cdot 4\cdot(7\cdot 6^2-4\cdot 5\cdot 6-20\cdot 5)}{5}=$$

$$=\frac{24\cdot(252-120-100)}{5}=\frac{6\cdot 4\cdot 32\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{1536}{10}=$$

$=153{,}6$ тыс.

② О.С.В. $=400+400+153{,}6=953{,}6$ тыс.

Ответ: $953{,}6$ тыс.

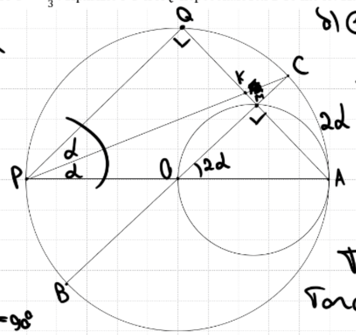
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 31

17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.



а) ① $\angle AQP = 90°$ (опирается на AP-диаметр)

$\angle AMO = 90°$ (опирается на AO-диаметр)

Получаем $PQ \parallel BC$ т.к. $\angle AQP = \angle AMO = 90°$ (соотв.)

б) ① Пусть $\angle COA = 2\alpha$

Тогда $\smile CA = 2\alpha$

$\angle QPA = \angle COA = 2\alpha$ (соотв.)

$\angle CPA = \frac{1}{2} \smile CA = \alpha$

Тогда $\angle QPK = 2\alpha - \alpha = \alpha$

Тогда PK - биссектриса $\triangle APQ$

② $\frac{QK}{KA} = \frac{PQ}{PA} = \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ по т. о бис.

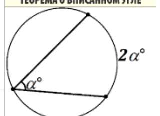
$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$

Ответ: 2 : 3.

ИСТОЧНИКИ

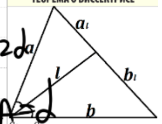
Ященко 2018
Основная волна 2017

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



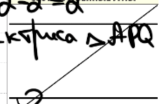
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ



Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) - ax + (a-3)y + 1 = 0, \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

$$\begin{cases} a \cdot 2 - a - a + 3 + 1 = 0 \\ -2 = -2 \ \checkmark \end{cases}$$

Упростим 2-е ур-е системы:

$x \cdot y - 1 - y + x = 0$

$y(x-1) + (x-1) = 0$

$(x-1)\cdot(y+1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$

Получаем $\begin{cases} ax^2 + ay^2 - ax + ay - 3y + 1 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} x = 1 \\ \cancel{a} + a \cdot y^2 - \cancel{a} + ay - 3y + 1 = 0 \end{cases} \\ ② \begin{cases} y = -1 \\ ax^2 + \cancel{a} - ax - \cancel{a} + 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Если $a = 0$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ 4 = 0 \end{cases} \text{ нет реш} \end{array}\right.$

реш

значит $a \neq 0$

Если $a \neq 0$, то кв-е ур-я ① и ② должны иметь по 2 реш.

каждое

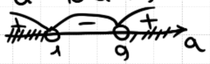
Получаем

$\begin{cases} ④ \ D_{①} > 0 \\ ⑤ \ D_{②} > 0 \\ ⑥ \ a \cdot 1^2 + a \cdot (-1)^2 - a \cdot 1 + a \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 1 \neq 0 \\ ⑦ \ a \neq 0 \end{cases}$

④ $(a-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 > 0$

$a^2 - 6a + 9 - 4a > 0$

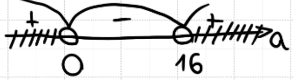
$a^2 - 10 \cdot a + 9 > 0$



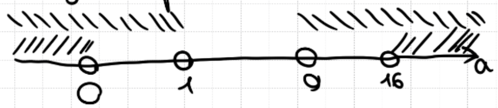
⑤ $(-a)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 > 0$

$a^2 - 16 \cdot a > 0$

$a \cdot (a - 16) > 0$



Найдём пересеч.



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2019

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.
а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.
Источники:
Основная волна (Резерв) 2019

а) $x^2 + p\cdot x + 55 = 0$
по теореме Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 55 \end{cases}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 55$ или $x_1 = 5$, $x_2 = 11$
Тогда $p = -56$ Тогда $p = -16$
Ответ: -56 и -16.

б) по теореме Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \quad | \cdot(-1) \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$+\begin{cases} -x_1 - x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$
$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = p + q \quad | +1$
$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 30 + 1$
$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 31$
Учитывая, что x_1 и x_2 – натуральные числа
Получаем

$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 31 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 - 1 = 31 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 32 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 32 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
$q = 2 \cdot 32 = 64$ $q = 32 \cdot 2 = 64$
Ответ: б) 64

Ответ:	
	а) -56 и -16
	б) 64
	в) 6 и 8

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.
а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

в) ① $(q - p)(q + p) = 2108$

② Разложим 2108 на простые множители:
$2108 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$

$\begin{array}{r|l} 2108 & 2 \\ 1054 & 2 \\ 527 & 17 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$

③ по т. Виета:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$+\begin{cases} -x_1 - x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$(q - p) \cdot (q + p) = 2108$
$(x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2) = 2108$
Множители в левой части уравнения отличаются друг от друга на чётное число $(2x_1 + 2x_2)$
=> множители одной чётности, т.е. оба чётные, либо оба нечётные
НО 2108 – чётное => множители чётные.

Также первый множитель больше.

④ Получаем:
$(x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2) = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$

$(2 \cdot 31) \cdot (2 \cdot 17) = 2108$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 62 \quad | +1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 34 \quad | +1 \end{cases}$

$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 63 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 35 \end{cases}$

Если $x_1 = 2$, $x_2 = 36$ ×
Если $x_1 = 6$, $x_2 = 8$ ✓
Если $x_1 = 8$, $x_2 = 6$ ✓
Если $x_1 = 36$, $x_2 = 2$ ×

Или

$(2 \cdot 31 \cdot 17) \cdot (2) = 2108$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1054 \quad | +1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 2 \quad | +1 \end{cases}$

$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1055 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 \end{cases}$

Если $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ×
Если $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ ×

Ответ: в) 6 и 8

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором <…>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.