

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения3

Стереометрия.....4

Неравенства.....6

Экономика7

Планиметрия9

Параметры10

Числа12

Уравнения

13.1. а) Решите уравнение

$$2 - 2 \cos(\pi + 2x) - \sqrt{8} \cos x = \sqrt{6} - \sqrt{12} \cos x$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi l, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m, l \in \mathbb{Z}$,

б) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$.

13.2. а) Решите уравнение

$$1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin(x + \pi) = \sqrt{3} - 2 \sin x$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$,

б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}$.

13.2.1. а) Решите уравнение

$$1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} - 2 \sin(x - \pi)$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$,

б) $-\frac{14\pi}{3}, -\frac{13\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}$.

13.3. а) Решите уравнение

$$2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{2} - 4$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, n, k, m, l \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

13.4. а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 0,75 = \cos^2 x$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{3}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$.

Стереометрия

14.1. На рёбрах BC , AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L , M и N соответственно. Известно, что $BL : LC = AM : MB = AN : ND = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость α , проходящая через точки L , M и N , делит ребро CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 6$.

Ответ: $3\sqrt{11}$.

14.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 5. На ребре AC отмечена точка M , а на продолжении ребра BC за точку C – точка N так, что $CM = CN = 1$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{267}}{4}$.

14.3. Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K . Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $4\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC .

б) В каком отношении точка K делит ребро SA , считая от вершины S , если объем пирамиды равен $18\sqrt{3}$.

Ответ: б) $1 : 2$.

14.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 2$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь основания равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $3 : 1$.

14.5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро AB провели плоскость α , образующую сечение $ABMN$, где точки M и N – точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SD соответственно. Известно, что $AB = BM = AN = 4MN$.

а) Докажите, что точки M и N делят ребра SC и SD в отношении $1 : 3$, считая от вершины S .

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью α .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{55}}{11}$.

14.6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны, на ребре AA_1 отмечена точка M , на ребре A_1B_1 отмечена точка K . Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все ребра призмы равны 12.

Ответ: б) $6\sqrt{30}$.

14.6.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны, на ребре AA_1 отмечена точка M . Известно, что $AM = 3MA_1$. Через точки M и C_1 провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1 .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1B_1 пополам.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α равна $\sqrt{15}$.

Ответ: б) 4.

Неравенства

15.1. Решите неравенство $\frac{2^{3x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x - 1} \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

15.2. Решите неравенство $\frac{27^{x+1} - 9^{x+2} + 3^{x+4} - 27}{50x^2 + 70x + 24,5} \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -0,7) \cup (-0,7; 0]$.

15.2.1. Решите неравенство $\frac{27^{x+1} - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+2} - 1}{50x^2 + 50x + 12,5} \geq 0$.

Ответ: $[-1; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$.

15.3. Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Ответ: $\{-1\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

15.4. Решите неравенство $\frac{27x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{64x^2 - 4 \cdot 8^{x^2} + 4} \geq 0$.

Ответ: $\{-\frac{1}{3}\} \cup [\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

15.5. Решите неравенство $\frac{2}{2^x + 10} \leq \frac{3}{2^{x+1} - 1}$.

Ответ: $(-1; 5]$.

Экономика

16.1. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2027 году составит 2610 тыс. рублей?
Ответ: 3.

16.2. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 7830 тыс. рублей?
Ответ: 1.

16.2.1. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2030 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2030 году составит 3195 тыс. рублей?
Ответ: 1.

16.3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

Ответ: 5.

16.4. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й (с января 2027 года по март 2028 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 марта 2028 года долг составит 200 тыс. рублей;
- 15 апреля 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного его погашения составит 612 тыс. рублей?

Ответ: 500 тыс. рублей.

16.5. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2031 году составит 1356 тыс. рублей?

Ответ: 6.

Планиметрия

17.1. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ , причем точка P лежит на стороне AD , а точка Q – на стороне CD . На стороне AD отмечена точка M . Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ , если $AM = BP = 21$, $AB = BQ = 29$.

Ответ: б) 10.

17.2. В четырехугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .

б) Найдите длину стороны MN , если $LA = 3$.

Ответ: б) $\sqrt{3} + 1$.

17.3. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN – биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN , если $BC = 21$ и $\sin \angle ABC = \frac{2}{5}$.

Ответ: б) 6.

17.4. В остроугольном треугольнике ABC угол BAC в два раза больше угла ABC . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AOC , пересекает отрезок BC в точках C и P .

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны. ($AP = BP$)

б) Найдите AB , если $BC = 6$ и $AC = 4$.

Ответ: б) 5.

17.5. В треугольнике ABC угол ACB равен 30° , отрезки $АН$ и AM – высота и медиана соответственно, причём точка H лежит на отрезке BM . Отрезок MQ – высота треугольника AMC , а прямые $АН$ и MQ пересекаются в точке F . Известно, что луч AM – биссектриса угла $САН$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь CMF , если $AB = 8$.

Ответ: б) $16\sqrt{3}$.

Параметры

18.1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(7x + |x + a| - |6x|)^2 + (a + 1)(7x + |x + a| - |6x|) - a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

18.2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(3x + |x - a| + |2x + a + 1|)^2 - a(3x + |x - a| + |2x + a + 1|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно один корень.

Ответ: $\left\{\frac{8\sqrt{3}}{3}\right\} \cup \left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2}; \frac{-1+\sqrt{61}}{2}\right)$.

18.3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2)^2 + (a + 2)(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (0; \frac{9}{4}) \cup (\frac{9}{4}; +\infty)$.

18.3.1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4x - 3|x + a^2| + |x - 1| + 3a^2)^2 - (a + 1)(4x - 3|x + a^2| + |x - 1| + 3a^2) + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

18.4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x - a^2| + |x + 1|)^2 - 7(|x - a^2| + |x + 1|) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{33}}{4}; \frac{\sqrt{33}}{4}\right\} \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

18.4.1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x + a^2| + |x - 1|)^2 - 8(|x + a^2| + |x - 1|) - a^2 + 17 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\sqrt{5}; -\sqrt{2}) \cup \{-1; 1\} \cup (\sqrt{2}; \sqrt{5})$.

18.5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x - 8| - |x - a|)^2 - 7a(|x - 8| - |x - a|) + 10a^2 + 6a - 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$.

18.6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x - a - 1| + |x - a + 1|)^2 + a(|x - a - 1| + |x - a + 1|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $\left\{-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right\} \cup (-1 - \sqrt{13}; -1 + \sqrt{13})$.

18.7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a\left(x + \frac{9}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{9}{x}\right) - 49a + 14 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $\{0; \frac{1}{7}\} \cup (\frac{2}{13}; 2)$.

Числа

19.1. На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или семи чисел из записанных является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 567 и 1414?

б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 567?

в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2 . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет, б) нет, в) 8.

19.1.1. На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых пяти или шести чисел из записанных является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 602 и 1512?

б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 602?

в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат n^2 натурального числа n , большего 1. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет, б) нет, в) 11.

19.2. На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трех, четырех, пяти или шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30033.

а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 303?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 31?

в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет, б) нет, в) 9.

19.3. На доске записано некоторое количество последовательных натуральных чисел, среди которых, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное число k таких чисел.

Ответ: а) да, б) нет, в) 139.

19.3.1. На доске записано некоторое количество последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять делятся на 15.

а) Могло ли среди записанных чисел быть больше 5 чисел, делящихся на 16?

б) Могло ли среди записанных чисел быть меньше пяти чисел, делящихся на 11?

в) Найдите наибольшее возможное число k такое, что среди записанных чисел больше пяти чисел делятся на k .

Ответ: а) да, б) нет, в) 17.

19.4. а) Приведите пример семизначного числа, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 206, 835, 930.

б) Существует ли восьмизначное число, из которого, вычеркивая цифры, можно получить каждое из чисел: 247, 345, 586, 812.

в) Найдите наименьшее натуральное число, из которого можно получить все натуральные числа от 1 до 50 включительно, вычеркивая цифры.

Ответ: а) например, 8923056; б) нет; в) 12341234506789.