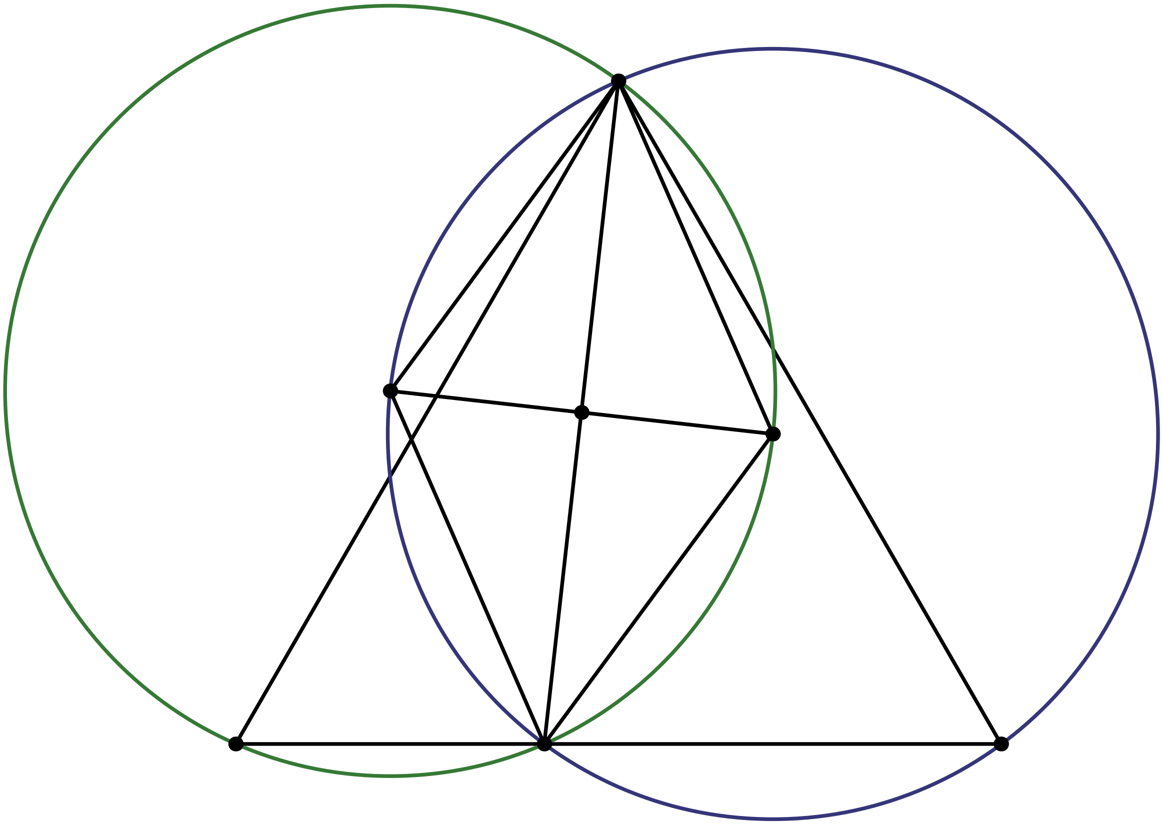
Планиметрия второй части ЕГЭ

Сборник задач с решениями и интерактивными чертежами



О СБОРНИКЕ

Что есть в сборнике?

Эта книга содержит 52 задачи, предлагавшихся на ЕГЭ за последние 6 лет, а также 11 задач с официальных пробных экзаменов. К каждой задаче есть интерактивный чертёж в системе GeoGebra, подсказка, ответ и решение, а также аналог для закрепления материала. В конце книги вы найдете справочник теорем. Для каждой теоремы указаны номера — ссылки на задачи, в которых может быть применена теорема.

О сложности задач.

Сложность каждой задачи указана звездочками рядом с ее номером: от 1 до 5. Одну звезду каждая задача получала по умолчанию. Дополнительные звезды задаче присваивались за:

- ★ громоздкий чертеж;
- ★ применение нетривиальной тригонометрии;
- ★ дополнительное построение;
- ★ длинную цепочку рассуждений (более 6 шагов);
- ★ необходимость решения системы уравнений.

Подбирайте задачу себе по уровню — и вперед!

Если задача не решается...

- ...Не спешите разбирать решение. Рядом с каждой задачей вы найдёте кликабельную ссылку на чертеж в системе GeoGebra. Изучите чертёж и, скорее всего, заметите деталь, которой не хватало, чтобы добраться до ответа. Часто это бывает равнобедренный треугольник или параллельные прямые.
- Если чертеж не помог, то кликайте на кнопку с подсказкой. Обдумайте ключевые факты, данные в ней. Доказательство этих утверждений поможет вам продвинуться в решении.
- Итак, вы изрядно посидели над задачей, прогулялись, раздумывая над ней, посмотрели подсказки, но все еще не понимаете, за что зацепиться? В этом случае можете разобрать решение. Если это происходит регулярно, то лучше сделать шаг назад и отточить свое мастерство геометра на более простых примерах.

Как читать доказательства?

- В решениях вы найдете утверждения, отмеченные зеленым. Например, $AB = BC$ (1). Цифра в скобках нужна для ссылки на это утверждение при доказательстве.

- Например, можно утверждать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC [1]. Видите, мы сослались на утверждение [1] из предыдущего пункта, чтобы что-то сказать про $\triangle ABC$. Ссылки на утверждения отмечены синим. Не все факты пронумерованы. В пределах одного пункта доказательства ссылки не проставлены. Например, мы будем утверждать, что $\angle BAC = \angle BCA$ без ссылки на то, что $\triangle ABC$ — равнобедренный, так как эти утверждения находятся в одном пункте.

Чем оформление задачи отличается от ее решения?

Вам может показаться, что решения геометрических задач очень громоздкие. Но важно понимать, что вы видите не само решение, а его чистовое оформление. Обычно, мы решаем задачу на чертеже.

- Равные углы отмечаем одной буквой α, а не пишем $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$.

- Счет углов ведем тоже на чертеже, а не пишем: "По сумме углов $\triangle ABC$ найдем $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 2\alpha$".

- Подписываем отношения отрезков. Вместо того, чтобы писать $AB : AC = 2 : 1$, мы просто отрезок AB подпишем $2x$, а отрезок AC — x.

- Наконец, решая задачу, мы устно пользуемся многими фактами. А при чистовом оформлении их нужно указать, что раздувает наши записи.

Какой из этого можно сделать вывод? Читайте решения с карандашом в руках. Смотрите на ключевые идеи и пробуйте их реализовать на свой лад. Тогда задачи перестанут казаться необъятными.

О возможных ошибках.

- Ошибки могут встретиться вам в текстах задач, в решениях, в чертежах и в ответах.

- Я предлагаю справиться с ними вместе. Если вы нашли ошибку в задачнике, то, пожалуйста, напишите мне об этом в Telegram или в сообщениях в группе VK. Ошибка будет оперативно исправлена. И скоро мы получим сборник без ошибок!

ЗАДАЧИ ПО ГОДАМ

2015—2019.

Задача 1. Основа 2015. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.
а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 1 : 3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Задача 2. Основа 2016. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.
а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.
б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

Задача 3. Основа 2017. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.
а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.
б) Найдите AD, если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

Задача 4. Основа 2018. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2, если $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

Задача 5. Основа 2019. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K. Известно, что $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$.
а) Докажите, что $AN = CK$.
б) Найдите KN, если радиус окружности равен 12.

Задача 6. Досрок 2019. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. AH — высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

2020.

Задача 7. Пробник 2020. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В прямоугольнике $ABCD$ длины сторон AB и AD относятся как $1:3$. На отрезке AD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках N и M соответственно.
а) Докажите, что прямые MN и AD параллельны.
б) Найдите площадь четырехугольника $AMND$, если $AD = 6$.

Задача 8. Пробник 2020. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E, вписан в окружность. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M.
а) Докажите, что EM — медиана треугольника CED.
б) Найдите длину EM, если $AD = 8$, $AB = 4$ и $\angle BDC = 60°$.

Задача 9. Досрок 2020. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

Задача 10. Основа 2020. ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 7 : 12$, $BA_1 : A_1C = 3 : 1$, $AB_1 : B_1C = 3 : 4$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.
а) Докажите, что четырехугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.
б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 21$, $BC = 16$.

Задача 11. Основа 2020. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причем $CM = BC$ и $CN = AC$.
а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.
б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC = 4$ и $AC = 8$.

Задача 12. Основа 2020. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D. Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E.
а) Докажите, что AE параллельно BD.
б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 8 и 15.

Задача 13. Резерв 2020. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника в точке L. Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB, пересекает катет BC в точке M.
а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 20$, $CM = 3\sqrt{5}$.

2021.

Задача 14. Пробник 2021. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Окружность, описанная около треугольника ACD пересекает сторону AB в точке E.
а) Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.
б) Найдите площадь треугольника CDE, если $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$.

Задача 15. Пробник 2021. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, причём её основание AD является диаметром, а $\angle ABC = 120°$. Хорда CM пересекает диаметр AD в точке P.
а) Докажите, что MB — биссектриса угла AMC.
б) Найдите площадь треугольника PMD, если радиус окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$, равен 8, и $AP = 4$.

Задача 16. Досрок 2021. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120°$.

Задача 17. Основа 2021. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Около трапеции $ABCD$ с большим основанием AD описана окружность. BH — высота трапеции, вторично пересекающая описанную окружность в точке K.
а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.
б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус описанной около трапеции $ABCD$ окружности равен 6, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырехугольника $BCNH$ в 35 раз больше площади треугольника NKH.

Задача 18. Основа 2021. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает боковую сторону CD в точке E, а основание AD в точке F, причём $AB = FD$.
а) Докажите, что $\angle EAD = \angle EDA$.
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5$, $BC = 3$, а прямые AE и CF перпендикулярны.

Задача 19. Основа 2021. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.
а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.
б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

Задача 20. Основа 2021. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне. На плоскости выбрали точку E такую, что прямая BE перпендикулярна прямой AD, а прямая CE перпендикулярна прямой BD.
а) Докажите, что $\angle AEB = \angle ADB$.
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 32$, $\cos\angle AEB = \frac{3}{4}$.

Задача 21. Основа 2021. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90°$.
а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC.
б) Найдите CN, если $BC = 2$, $AC = 4$, $CM = 1$.

Задача 22. Резерв 2021. ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведённая к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P, прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK : KP$, если $\cos\angle BAC = \dfrac{4}{5}$.

2022.

Задача 23. Пробник 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан прямоугольный треугольник RST с прямым углом T. На катете RT взята точка M. Окружность с центром O и диаметром TM касается гипотенузы в точке N.
а) Докажите, что прямые MN и SO параллельны.
б) Найдите площадь четырехугольника $SOMN$, если $TN = 8$ и $RM : MT = 1 : 3$.

Задача 24. Пробник 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольник ABC вписана окружность, которая касается AB в точке P. Точка M — середина стороны AB.
а) Докажите, что $MP = \dfrac{|BC - AC|}{2}$.
б) Найдите $\angle ABC$, если известно, что длина отрезка MP равна половине радиуса вписанной в треугольник ABC окружности, $BC > AC$, а отрезки AM и CM равны.

Задача 25. Досрок 2022. ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD, а $FC = ED$.
а) Докажите, что $\angle BCF = \angle AFE$.
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $ED = 3BF$, $FE = 5$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $14\sqrt{35}$.

Задача 26. Досрок 2022. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM : MB = CN : NB = 2 : 3$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка MN в точке L.
а) Докажите, что $AB + BC = 4AC$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $LM = \dfrac{9}{5}$, $LN = 3$.

Задача 27. Основа 2022. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.
а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.
б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 7$, $BC = 21$, а $\angle DAB = 60°$.

Задача 28. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E, что $AE = CE$.
а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
б) Найдите EL, если $AC = 12$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \dfrac{1}{4}$.

Задача 29. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B. Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.
а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.
б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T. Найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \dfrac{3}{8}$.

Задача 30. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке H. Через точку C_1 провели прямую, параллельную BB_1. Данная прямая пересекает AA_1 в точке K.
а) Докажите, что $AB \cdot HK = C_1H \cdot BC$.
б) Найдите отношение площадей треугольников ABC и C_1HK, если известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = \sqrt{31}$.

Задача 31. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках M и N. Известно, что $\angle BCA = 85^\circ$ и $\angle ABC = 40^\circ$.
а) Докажите, что $CN = BM$.
б) Пусть MN и BC пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника BDN, если его высота BH равна 7.

Задача 32. Основа 2022. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC, соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.
а) Докажите, что $\angle BKM = 45^\circ$.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если $AB = 4\sqrt{5}$.

Задача 33. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF пересекает AD в точке E. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK.
а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.
б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $CDEF$, если известно, что $BD : DC = 3 : 2$.

Задача 34. Основа 2022. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что около четырехугольника $AMNC$ можно описать окружность.
а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) На стороне AC отмечена точка F, такая что $\angle AFB = 135^\circ$. Отрезок BF пересекает отрезок MN в точке E. Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AMNC$, если $\angle ABC = 120^\circ$ и $EF = 6\sqrt{2}$.

Задача 35. Резерв 2022. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Точки I и J — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.
а) Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.
б) Найдите IJ, если $AC = 16$, $\cos \angle BDC = \frac{1}{9}$.

Задача 36. Резерв 2022. ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Две окружности пересекаются в точках A и B. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках C и D. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке M, центры окружностей лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, точка B лежит между точками A и M.
а) Докажите, что $MC = MD$.
б) Найдите расстояние между центрами данных окружностей, если их радиусы равны 3 и 1 соответственно, а точка B является серединой отрезка AM.

Задача 37. Резерв 2022. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали пересекаются в точке O, $AD = 2BC$. Через вершину A проведена прямая параллельная диагонали BD, а через вершину D проведена прямая параллельная диагонали AC, и эти прямые пересекаются в точке E.
а) Докажите, что $BO : AE = 1 : 2$.
б) Прямые BE и CE пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите MN, если $AD = 10$.

2023.

Задача 38. Пробник 2023. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ADB, касается отрезка AD в точке P, а прямая OP пересекает сторону AB в точке K.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOK$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BDOK$, если $AB = 8$, $BC = \sqrt{15}$, $AC = 7$.

Задача 39. Досрок 2023. ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые MK и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков MK и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

Задача 40. Основа 2023. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении $1 : 4$.

б) Найдите сторону ромба, если $MN = 3\sqrt{2}$.

Задача 41. Основа 2023. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AC выбрана точка M, серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E, а сторону BC в точке K.

а) Докажите, что $\angle AEM = \angle CMK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если $AM : CM = 1 : 4$.

Задача 42. Основа 2023. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O. Точки M и N отмечены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Известно, что $AM = MO$, $CN = NO$.

а) Докажите, что точки M, N и O лежат на одной прямой.

б) Найдите $AM : MB$, если известно, что $AO = OC$ и $BC : AD = 1 : 7$.

Задача 43. Основа 2023. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан ромб $ABCD$. Прямая, перпендикулярная стороне AD, пересекает его диагональ AC в точке M, диагональ BD — в точке N, причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

а) Докажите, что $\cos \angle BAD = \frac{1}{5}$.

б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

Задача 44. Основа 2023. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям трапеции.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен ее боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если известно, что $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : BM = 2 : 3$.

2024.

Задача 45. Пробник 2024. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На стороне AB взята точка K так, что отрезки KL и BC параллельны. Окружность, описанная около треугольника AKC, пересекает прямую BC повторно в точке M.
а) Докажите, что $AK = MB$.
б) Найдите площадь четырёхугольника $AKMC$, если площадь треугольника ABC равна 64 и $AB : BC = 3 : 5$.

Задача 46. Пробник 2024. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан остроугольный треугольник ABC. В нём высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.
а) Докажите, что $\angle BAH = \angle BB_1C_1$.
б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до его стороны BC, если известно, что $B_1C_1 = 18$, а $\angle BAC = 30°$.

Задача 47. Основа 2024. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

$ABCDE$ — вписанный пятиугольник. M — точка пересечения диагоналей BE и AD. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.
а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.
б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

Задача 48. Основа 2024. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

$ABCDE$ — вписанный пятиугольник. $AB = CD = 5$, $BC = DE = 8$.
а) Докажите, что $AC = CE$.
б) Найдите BE, если известно, что $AD = 10$.

Задача 49. Основа 2024. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.
а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.
б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

Задача 50. Основа 2024. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.
а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.
б) Найдите NO, если $AB = 24$, $AC = 10$.

Задача 51. Основа 2024. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.
а) Докажите, что $AC = 6$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90°$.

Задача 52. Резерв 2024. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
а) Докажите, что прямые EH и CA параллельны.
б) Найдите отношение EH к CA, если $\angle ABC = 60°$.

Задача 53. Резерв 2024. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. Точка E принадлежит стороне AB, прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая BH параллельна прямой ED.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 135°$.

Задача 54. Резерв 2024. ★ ★ ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 на серединах сторон BC, AC и AB соответственно.

а) Докажите, что окружность, описанная около треугольника AB_1C_1, проходит через точку пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников A_1B_1C и A_1BC_1, отличную от точки A_1.

б) Известно, что $AB = AC = 13$, $BC = 10$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами в центрах окружностей, описанных вокруг треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C.

2025.

Задача 55. Пробник 2025. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Точка P — середина большего основания AB. Отрезок PD пересекает диагональ AC в точке M, отрезок PC пересекает диагональ BD в точке N. Меньшее основание трапеции относится к большему как $2 : 3$.

а) Докажите, что треугольники MEN и AEB подобны.

б) Найдите площадь треугольника MEN, если площадь трапеции $ABCD$ равна 1225.

Задача 56. Досрок 2025. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

Задача 57. Основа 2025. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

Задача 58. Основа 2025. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

Задача 59. Основа 2025. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен $30°$. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

Задача 60. Основа 2025. ★ ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.
а) Докажите, что $AB \perp BD$.
б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

Задача 61. Основа 2025. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

В четырёхугольник $KLMN$ вписана в окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle LMN = \angle KLM = 60°$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 9$.

Задача 62. Основа 2025. ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

Задача 63. Демо 2026. ★ ★

Чертёж | Подсказка | Ответ | Решение | Аналог

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и CB параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

АНАЛОГИ

Аналог к задаче 1.

К задаче | Ответ

Точка T лежит на стороне PQ выпуклого четырёхугольника $LPQS$, причём P и Q — вершины равнобедренных треугольников с основаниями LT и ST соответственно, а прямые LT и TS перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах P и Q четырёхугольника $LPQS$ пересекаются на стороне LS.

б) Пусть M — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $LPQS$, если известно, что $PT : TQ = 2 : 3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых LT, ST, PM и QM, равна 6.

Аналог к задаче 2.

К задаче | Ответ

В прямоугольном треугольнике SPK с прямым углом K точки A и B — середины катетов SK и PK соответственно, KH — высота.

а) Докажите, что прямые AH и BH перпендикулярны.

б) Пусть X — точка пересечения прямых SK и BH, а Y — точка пересечения прямых PK и AH. Найдите площадь треугольника XYA, если $SH = 2$ и $PH = 4$.

Аналог к задаче 3.

К задаче | Ответ

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой PQ. Диаметр AP первой окружности и продолжение хорды AQ этой окружности пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно.

а) Докажите, что треугольники AQB и O_1PO_2 подобны.

б) Найдите PB, если $\angle BPC = \angle QBA$, радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй и $PQ = 4$.

Аналог к задаче 4.

К задаче | Ответ

Окружность с центром O_1 касается оснований LK и TP и боковой стороны TL трапеции $TLKP$. Окружность с центром O_2 касается сторон LK, KP и TP.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $TLKP$.

б) Найдите O_1O_2, если $TL = 12$, $LK = 8$, $KP = 33$, $TP = 35$.

Аналог к задаче 5.

К задаче | Ответ

Около остроугольного треугольника ISQ с различными сторонами описали окружность с диаметром SM. Высота SH пересекает эту окружность в точке T. Известно, что $\angle SIQ = 35°$, $\angle IQS = 65°$.
а) Докажите, что $IM = QT$.
б) Найдите TM, если диаметр окружности равен 10.

Аналог к задаче 6.

К задаче | Ответ

В треугольнике LTQ точки L_1, T_1 и Q_1 — середины сторон TQ, LQ и LT соответственно. LH — высота, $\angle TLQ = 60°$, $\angle TQL = 45°$.
а) Докажите, что точки L_1, T_1, Q_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите TH, если $TQ = 1 + \sqrt{3}$.

Аналог к задаче 7.

К задаче | Ответ

В прямоугольнике $MNLK$ длины сторон MN и MK относятся как $1 : 2$. На отрезке MK как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали ML и NK в точках E и F соответственно.
а) Докажите, что прямые FE и MK параллельны.
б) Найдите площадь четырехугольника $MFEK$, если $MK = 8$.

Аналог к задаче 8.

К задаче | Ответ

Четырёхугольник $MNKQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке H, вписан в окружность. Прямая, проходящая через точку H и перпендикулярная к MN, пересекает сторону KQ в точке T.
а) Докажите, что HT — медиана треугольника KHQ.
б) Найдите длину HT, если $MQ = 10$, $MN = 2$ и $\angle NQK = 45°$.

Аналог к задаче 9.

К задаче | Ответ

В треугольнике MNK угол M равен $120°$. Прямые, содержащие высоты NA и KB треугольника MNK, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника MNK.
а) Докажите, что $MH = MO$.
б) Найдите площадь треугольника KHO, если $NK = 2$, $\angle MNK = 30°$.

Аналог к задаче 10.

К задаче | Ответ

На сторонах MN, NK и MK треугольника MNK отмечены точки K_1, M_1 и N_1 соответственно, причем $MK_1 : K_1N = 7 : 12$, $NM_1 : M_1K = 3 : 1$, $MN_1 : N_1K = 3 : 4$. Отрезки NN_1 и KK_1 пересекаются в точке P.
а) Докажите, что четырехугольник MPM_1N_1 — параллелограмм.
б) Найдите KP, если отрезки MP и NK перпендикулярны, $MK = 13$, $NK = 21$.

Аналог к задаче 11.

К задаче | Ответ

В прямоугольном треугольнике MNK точка A лежит на катете MK, а точка B лежит на продолжении катета NK за точку K, причем $KA = NK$ и $KB = MK$.
а) Отрезки KH и KT — высоты треугольников MKN и BKA соответственно. Докажите, что прямые KH и KT перпендикулярны.
б) Прямые NA и MB пересекаются в точке E. Найдите EA, если $NK = \sqrt{2}$ и $MK = 5\sqrt{2}$.

Аналог к задаче 12.

К задаче | Ответ

Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Вершины M и N равнобедренного прямоугольного треугольника MNK с прямым углом K лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая MK вторично пересекает меньшую окружность в точке P. Прямая NK вторично пересекает большую окружность в точке L.
а) Докажите, что ML параллельно NP.
б) Найдите MK, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

Аналог к задаче 13.

К задаче | Ответ

Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника MNK вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника в точке E. Прямая, проходящая через точку E и середину B гипотенузы MN, пересекает катет NK в точке A.
а) Докажите, что $\angle NAE = \angle NMK$.
б) Найдите NK, если $MN = 24$, $KA = 2$.

Аналог к задаче 14.

К задаче | Ответ

В треугольнике MNK биссектриса угла M пересекает сторону NK в точке P. Окружность, описанная около треугольника MKP пересекает сторону MN в точке L.

а) Докажите, что треугольник KPL равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника KPL, если $MN = 6$, $NK = 5$, $MK = 4$.

Аналог к задаче 15.

К задаче | Ответ

Трапеция $MNKP$ вписана в окружность, причём её основание MP является диаметром, а $\angle MNK = 120°$. Хорда KA пересекает диаметр MP в точке D.

а) Докажите, что AN — биссектриса угла MAK.

б) Найдите площадь треугольника DAP, если радиус окружности, описанной вокруг трапеции $MNKP$, равен 6, и $MD = 9$.

Аналог к задаче 16.

К задаче | Ответ

Высоты NN_1 и KK_1 остроугольного треугольника MNK пересекаются в точке H. Отрезок MD — диаметр окружности, описанной около треугольника MNK.

а) Докажите, что прямая HD пересекает отрезок NK в его середине.

б) Луч DH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника MNK, в точке A. Найдите длину отрезка AK_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой NK равно 3, $\angle NDH = 30°$.

Аналог к задаче 17.

К задаче | Ответ

Около трапеции $MNKP$ с большим основанием MP описана окружность. NH — высота трапеции, вторично пересекающая описанную окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые MK и MC перпендикулярны.

б) Прямые KC и MP пересекаются в точке B. Найдите MP, если радиус описанной около трапеции $MNKP$ окружности равен 4, $\angle NMK = 60°$, а площадь четырехугольника $NKBH$ в 15 раз больше площади треугольника BCH.

Аналог к задаче 18.

К задаче Ответ

Дана трапеция $MNKP$ с основаниями MP и NK. Окружность, описанная около треугольника MNK, пересекает боковую сторону KP в точке L, а основание MP в точке T, причём $MN = TP$.
а) Докажите, что $\angle LMP = \angle LPM$.
б) Найдите площадь трапеции $MNKP$, если $MN = 2$, $NK = 3$, а прямые ML и KT перпендикулярны.

Аналог к задаче 19.

К задаче Ответ

Точки M, N, K, P и L лежат на окружности в указанном порядке, причём $ML = LP = KP$, а прямые MK и NL перпендикулярны. Отрезки MK и NP пересекаются в точке F.
а) Докажите, что прямая LK пересекает отрезок FP в его середине.
б) Найдите площадь треугольника MNF, если $NP = \sqrt{10}$, $ML = 1$.

Аналог к задаче 20.

К задаче Ответ

В равнобедренной трапеции $MNKP$ меньшее основание NK равно боковой стороне. На плоскости выбрали точку L такую, что прямая NL перпендикулярна прямой MP, а прямая KL перпендикулярна прямой NP.
а) Докажите, что $\angle MLN = \angle MPN$.
б) Найдите площадь трапеции $MNKP$, если $MN = 3$, $\cos\angle MLN = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Аналог к задаче 21.

К задаче Ответ

Отрезок KH — высота прямоугольного треугольника MNK с прямым углом K. На катетах MK и NK выбраны точки A и B соответственно такие, что $\angle AHB = 90^\circ$.
а) Докажите, что треугольник ABH подобен треугольнику MNK.
б) Найдите KB, если $NK = 3$, $MK = 4$, $KA = 2$.

Аналог к задаче 22.

К задаче | Ответ

Окружность с центром O, построенная на катете MK прямоугольного треугольника MNK как на диаметре, пересекает гипотенузу MN в точках M и P. Касательная, проведённая к этой окружности в точке P, пересекает катет NK в точке A.
а) Докажите, что $NA = KA$.
б) Прямая PA пересекает прямую MK в точке D, прямая OA пересекает прямую ND в точке C. Найдите $NC : CD$, если $\cos\angle NMK = 0{,}32$.

Аналог к задаче 23.

К задаче | Ответ

Дан прямоугольный треугольник SRF с прямым углом F. На катете SF взята точка A. Окружность с центром O и диаметром FA касается гипотенузы в точке B.
а) Докажите, что прямые AB и RO параллельны.
б) Найдите площадь четырехугольника $ROAB$, если $FB = 6$ и $SA : AF = 1 : 8$.

Аналог к задаче 24.

К задаче | Ответ

В треугольник MNK вписана окружность, которая касается MN в точке D. Точка A — середина стороны MN.
а) Докажите, что $AD = \dfrac{|NK - MK|}{2}$.
б) Найдите $\angle MNK$, если известно, что длина отрезка AD равна четверти радиуса вписанной в треугольник MNK окружности, $NK < MK$, а отрезки MA и KA равны.

Аналог к задаче 25.

К задаче | Ответ

Дана равнобедренная трапеция $MNKP$. На боковой стороне MN и большем основании MP взяты соответственно точки T и L так, что TL параллельно KP, а $TK = LP$.
а) Докажите, что $\angle NKT = \angle MTL$.
б) Найдите площадь трапеции $MNKP$, если $LP = 2NT$, $TL = 4$ и площадь трапеции $TKPL$ равна $5\sqrt{15}$.

Аналог к задаче 26.

К задаче Ответ

В треугольнике MNK точки A и B лежат на сторонах MN и NK соответственно так, что $MA : AN = KB : BN = 2 : 3$. Окружность, вписанная в треугольник MNK, касается отрезка AB в точке E.
а) Докажите, что $MN + NK = 4MK$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MNK, если $EA = 3$, $BE = 5$.

Аналог к задаче 27.

К задаче Ответ

На стороне NK параллелограмма $MNKP$ выбрана точка A такая, что $MA = AK$.
а) Докажите, что центр вписанной в треугольник MAP окружности лежит на диагонали MK.
б) Найдите AP, если $MN = 2$, $NK = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, а $\angle PMN = 45°$.

Аналог к задаче 28.

К задаче Ответ

В параллелограмме $MNKP$ угол NMK вдвое больше угла KMP. Биссектриса угла NMK пересекает отрезок NK в точке E. На продолжении стороны KP за точку P выбрана такая точка L, что $ML = KL$.
а) Докажите, что $ME \cdot NK = MN \cdot MK$.
б) Найдите LE, если $MK = 10$, $\operatorname{tg} \angle NKM = \dfrac{2}{3}$.

Аналог к задаче 29.

К задаче Ответ

На стороне острого угла с вершиной M отмечена точка N. Из точки N на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры NK и NP соответственно.
а) Докажите, что $MK^2 + KP^2 = MP^2 + PN^2$.
б) Прямые MK и NP пересекаются в точке F. Найдите отношение $MF : FK$, если $\cos \angle MNK = \dfrac{1}{4}$.

Аналог к задаче 30.

К задаче | Ответ

В остроугольном треугольнике MNK проведены высоты MM_1, NN_1 и KK_1, которые пересекаются в точке H. Через точку K_1 провели прямую, параллельную NN_1. Данная прямая пересекает MM_1 в точке C.

а) Докажите, что $MN \cdot HC = K_1H \cdot NK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников MNK и K_1HC, если известно, что $MN = 3$, $NK = \sqrt{33}$, $MK = 6$.

Аналог к задаче 31.

К задаче | Ответ

Биссектриса NN_1 и высота KK_1 треугольника MNK пересекают описанную окружность в точках A и B. Известно, что $\angle NKM = 85°$ и $\angle MNK = 40°$.

а) Докажите, что $KB = NA$.

б) Пусть AB и NK пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника NPB, если его высота NH равна $\sqrt{5}$.

Аналог к задаче 32.

К задаче | Ответ

В квадрате $MNKP$ точки A и B — середины сторон MN и NK, соответственно. Отрезки KA и PB пересекаются в точке C.

а) Докажите, что $\angle NCA = 45°$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MNC, если $MN = 10\sqrt{13}$.

Аналог к задаче 33.

К задаче | Ответ

В треугольнике MNK на стороне NK отметили точку P так, что $MN = NP$. Биссектриса NT пересекает MP в точке L. Из точки K на прямую MP опущен перпендикуляр KC.

а) Докажите, что $MN : NK = ML : LC$.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника $KPLT$ к площади треугольника MNL, если известно, что $NP : PK = 2 : 1$.

Аналог к задаче 34.

К задаче | Ответ

В треугольнике MNK точки A и B — середины сторон MN и NK соответственно. Известно, что около четырехугольника $MABK$ можно описать окружность.
а) Докажите, что треугольник MNK равнобедренный.
б) На стороне MK отмечена точка T, такая что $\angle MTN = 60°$. Отрезок NT пересекает отрезок AB в точке L. Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $MABK$, если $\angle MNK = 90°$ и $LT = 2\sqrt{15}$.

Аналог к задаче 35.

К задаче | Ответ

Точка P лежит на основании MK равнобедренного треугольника MNK. Точки J и I — центры окружностей, описанных около треугольников MNP и KNP соответственно.
а) Докажите, что прямые NJ и PI параллельны.
б) Найдите JI, если $MK = 30$, $\cos\angle NPK = \dfrac{3}{5}$.

Аналог к задаче 36.

К задаче | Ответ

Две окружности пересекаются в точках M и N. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках K и P. Прямая MN пересекает отрезок KP в точке A, центры окружностей лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MN, точка N лежит между точками M и A.
а) Докажите, что $AK = AP$.
б) Найдите расстояние между центрами данных окружностей, если их радиусы равны 2 и 1 соответственно, и $AN : MN = 1 : 2$.

Аналог к задаче 37.

К задаче | Ответ

В трапеции $MNKP$ с основанием MP диагонали пересекаются в точке O, $MP = 3NK$. Через вершину M проведена прямая параллельная диагонали NP, а через вершину P проведена прямая параллельная диагонали MK, и эти прямые пересекаются в точке L.
а) Докажите, что $NO : ML = 1 : 3$.
б) Прямые NL и KL пересекают сторону MP в точках A и B соответственно. Найдите AB, если $MP = 21$.

Аналог к задаче 38.

К задаче | Ответ

Серединный перпендикуляр к стороне MN треугольника MNK пересекает сторону MK в точке P. Окружность с центром O, вписанная в треугольник MPN, касается отрезка MP в точке D, а прямая OD пересекает сторону MN в точке C.
а) Докажите, что около четырёхугольника $NPOC$ можно описать окружность.
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $NPOC$, если $MN = 6$, $NK = 8$, $MK = 10$.

Аналог к задаче 39.

К задаче | Ответ

Две окружности касаются внутренним образом в точке M, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда NK большей окружности касается меньшей в точке D. Хорды MN и MK пересекают меньшую окружность в точках C и A соответственно.
а) Докажите, что прямые AC и NK параллельны.
б) Пусть E — точка пересечения отрезков AC и MD. Найдите ME, если радиус большей окружности равен 4, а $NK = 4\sqrt{2}$.

Аналог к задаче 40.

К задаче | Ответ

Прямая, перпендикулярная стороне NK ромба $MNKP$, пересекает его диагональ MK в точке A, а диагональ NP в точке B, причем $MA : AK = 3 : 1$, $NB : BP = 5 : 3$.
а) Докажите, что прямая AB делит сторону ромба NK в отношении $5 : 1$.
б) Найдите сторону ромба, если $AB = \sqrt{2}$.

Аналог к задаче 41.

К задаче | Ответ

Дан равносторонний треугольник MNK. На стороне MK выбрана точка A, серединный перпендикуляр к отрезку NA пересекает сторону MN в точке L, а сторону NK в точке C.
а) Докажите, что $\angle MLA = \angle KAC$.
б) Найдите отношение площадей треугольников MLA и KAC, если $MA : KA = 1 : 2$.

Аналог к задаче 42.

К задаче Ответ

Дана равнобедренная трапеция $MNKP$ с основаниями MP и NK. Биссектрисы углов NMP и NKP пересекаются в точке O. Точки A и B отмечены на боковых сторонах MN и KP соответственно. Известно, что $MA = AO$, $KB = BO$.
а) Докажите, что точки A, B и O лежат на одной прямой.
б) Найдите $MA : AN$, если известно, что $MO = OK$ и $NK : MP = 1 : 41$.

Аналог к задаче 43.

К задаче Ответ

Дан ромб $MNKP$. Прямая, перпендикулярная стороне MP, пересекает его диагональ MK в точке A, диагональ NP — в точке B, причем $MA : AK = 2 : 1$, $NB : BP = 3 : 2$.
а) Докажите, что $\cos\angle NMP = -\frac{1}{4}$.
б) Найдите площадь ромба, если $AB = \sqrt{2}$.

Аналог к задаче 44.

К задаче Ответ

Биссектрисы углов NMP и NKP равнобедренной трапеции $MNKP$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям трапеции.
а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен ее боковой стороне.
б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если известно, что $MO = KO$ и данная прямая делит сторону MN в отношении $MA : NA = 1 : 2$.

Аналог к задаче 45.

К задаче Ответ

В треугольнике MNK проведена биссектриса NE. На стороне MN взята точка C так, что отрезки CE и NK параллельны. Окружность, описанная около треугольника MCK, пересекает прямую NK повторно в точке A.
а) Докажите, что $MC = AN$.
б) Найдите площадь четырёхугольника $MCAK$, если площадь треугольника MNK равна 25 и $MN : NK = 2 : 3$.

Аналог к задаче 46.

К задаче | Ответ

Дан остроугольный треугольник MNK. В нём высоты NN_1 и KK_1 пересекаются в точке H.
а) Докажите, что $\angle NMH = \angle NN_1K_1$.
б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника MNK до его стороны NK, если известно, что $N_1K_1 = \sqrt{3}$, а $\angle NMK = 60°$.

Аналог к задаче 47.

К задаче | Ответ

$MNKPL$ — вписанный пятиугольник. A — точка пересечения диагоналей NL и MP. Известно, что $NKPA$ — параллелограмм.
а) Докажите, что $NK = LP$.
б) Найдите MN, если известно, что $NL = 10$, $NK = 3$, $MP = 6$.

Аналог к задаче 48.

К задаче | Ответ

$MNKPL$ — вписанный пятиугольник. $MN = KP = 25$, $NK = PL = 40$.
а) Докажите, что $MK = KL$.
б) Найдите NL, если известно, что $MP = 50$.

Аналог к задаче 49.

К задаче | Ответ

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной B в точках M и N. Отрезок NK — диаметр этой окружности.
а) Докажите, что $\angle MBN = 2\angle MNK$.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой MN, если известно, что $MK = 10$ и $MN = 30$.

Аналог к задаче 50.

К задаче | Ответ

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной B в точках M и N. Отрезок NK — диаметр этой окружности.
а) Докажите, что прямая MK параллельна биссектрисе угла MBN.
б) Найдите BO, если $MN = 10$, $MK = 4$.

Аналог к задаче 51.

К задаче | Ответ

Точки L и T — середины сторон MN и NK треугольника MNK соответственно. Отрезок LT касается окружности, вписанной в треугольник MNK.
а) Докажите, что отрезок MK составляет четверть от периметра треугольника MNK.
б) Найдите площадь треугольника MNK, если его периметр равен 12, и $\angle MKN = 90°$.

Аналог к задаче 52.

К задаче | Ответ

В остроугольном треугольнике MNK проведены высоты MC и KA. На них из точек A и C опущены перпендикуляры AL и CH соответственно.
а) Докажите, что прямые LH и KM параллельны.
б) Найдите отношение LH к KM, если $\angle MNK = 30°$.

Аналог к задаче 53.

К задаче | Ответ

В трапеции $MNKP$ боковая сторона MN перпендикулярна основаниям. Из точки M на сторону KP опустили перпендикуляр MH. Точка L принадлежит стороне MN, прямые KP и KL перпендикулярны.
а) Докажите, что прямая NH параллельна прямой LP.
б) Найдите $NH : LP$, если $\angle NKP = 120°$.

Аналог к задаче 54.

К задаче | Ответ

В остроугольном треугольнике MNK отмечены точки M_1, N_1 и K_1 на серединах сторон NK, MK и MN соответственно.
а) Докажите, что окружность, описанная около треугольника MN_1K_1, проходит через точку пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников M_1N_1K и M_1NK_1, отличную от точки M_1.
б) Известно, что $MN = MK = NK = 10$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами в центрах окружностей, описанных вокруг треугольников MN_1K_1, M_1NK_1 и M_1N_1K.

Аналог к задаче 55.

К задаче | Ответ

Диагонали трапеции $MNKP$ пересекаются в точке L. Точка D — середина большего основания MN. Отрезок DP пересекает диагональ MK в точке A, отрезок DK пересекает диагональ NP в точке B. Меньшее основание трапеции относится к большему как $1:2$.
а) Докажите, что треугольники ALB и MLN подобны.
б) Найдите площадь треугольника ALB, если площадь трапеции $MNKP$ равна 1008.

Аналог к задаче 56.

К задаче | Ответ

Дана трапеция с диагоналями равными $\sqrt{7}$ и $3\sqrt{2}$. Сумма оснований равна 5.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите площадь трапеции.

Аналог к задаче 57.

К задаче | Ответ

В трапеции $TRSK$ угол RTK прямой. Окружность, построенная на большем основании TK как на диаметре, пересекает меньшее основание RS в точках S и L.
а) Докажите, что $\angle RTL = \angle STK$.
б) Диагонали трапеции $TRSK$ пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника TMR, если $TR = 1$, а $2RS = 3RL$.

Аналог к задаче 58.

К задаче | Ответ

Дан остроугольный треугольник MNK. Известно, что $\angle NMK = 2\angle MNK$. Точка Q — центр описанной окружности треугольника MNK. Вокруг треугольника MQK описана окружность, которая пересекает сторону NK в точке T.
а) Докажите, что треугольники MNK и TMK подобны.
б) Найдите MN, если $NK = \sqrt{10}$ и $MK = 2$.

Аналог к задаче 59.

К задаче | Ответ

В треугольнике PQR проведены высота PK и медиана PN, угол PRQ равен $30°$. Точка K лежит на отрезке QN. В треугольнике PRN проведена высота NT. Прямые NT и PK пересекаются в точке E. Известно, что PN — биссектриса угла KPR.
а) Докажите, что треугольник PQR прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника RNE, если $PR = 10$.

Аналог к задаче 60.

К задаче | Ответ

Биссектриса угла T параллелограмма $LTPR$ пересекает его сторону LR в точке S. Диагонали LP и TR параллелограмма пересекаются в точке Q. Окружность, описанная вокруг треугольника LTS, касается прямых TP и QS.
а) Докажите, что $LT \perp TR$.
б) Отрезки LP и TS пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $LTQS$, если $QS = 4$.

Аналог к задаче 61.

К задаче | Ответ

В четырёхугольник $ABCD$ вписана в окружность с центром I. Эта окружность касается стороны CD в точке T. Известно, что $\angle ADC = 90°$, $\angle BCD = \angle ABC = 60°$.
а) Докажите, что точка T лежит на прямой BI.
б) Найдите площадь четырехугольника $ABTD$, если $BT = \sqrt{3}$.

Аналог к задаче 62.

К задаче | Ответ

Дан параллелограмм $MNKP$ с острым углом PMN. В нем опущены высоты NH и NS на стороны MP и KP соответственно. На стороне MP отмечена точка A так, что $MA = NH$. Известно, что $MN = NS$.
а) Докажите, что $NA = HS$.
б) Найдите площадь трапеции $NAPK$, если $MA = NH = 12$, $MN = NS = 13$.

Аналог к задаче 63.

К задаче | Ответ

Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая MN касается первой окружности в точке M, а второй — в точке N. Прямая NC пересекает первую окружность в точке P, прямая MC пересекает вторую окружность в точке K.
а) Докажите, что прямые MP и KN параллельны.
б) Найдите площадь треугольника MCN, если известно, что радиусы окружностей равны 6 и 1.

ПОДСКАЗКИ

Подсказка к задаче №1.

К задаче

$AN = MN = DN$. $NK : CK = BM : MC = BT : NT$.

Подсказка к задаче №2.

К задаче

$BN = CN = HN$ и $AM = CM = HM$. $\triangle MHP = \triangle MCQ$. $\triangle MQC \sim \triangle NPC$.

Подсказка к задаче №3.

К задаче

$O_1O_2 \parallel CE$. $\triangle ABO_1 \sim ADO_2$.

Подсказка к задаче №4.

К задаче

$MEFN$ — прямоугольник. Достройте среднюю линию трапеции $ABCD$. $BE+AF = BL + AL$. $DN + CM = DT + CT$.

Подсказка к задаче №5.

К задаче

$\angle ABN = \angle CBK$. В прямоугольном $\triangle BNK$ $\angle KBN = 30°$.

Подсказка к задаче №6.

К задаче

$A_1B_1 \parallel AB$. $B_1C_1 \parallel BC$. $BC_1 = HC_1$. $AH = CH$.

Подсказка к задаче №7.

К задаче

$AM = DN$. AM и DN — высоты, проведенные из прямых углов. Пусть NH — высота $\triangle AND$. Тогда $\triangle ANH \sim ACD$.

Подсказка к задаче №8.

К задаче

$DM = EM = CM$. $\triangle DAE$ — равносторонний.

Подсказка к задаче №9.

К задаче

A — точка пересечения высот $\triangle BHC$. $\angle ABC$ — вписанный; найдите центральный угол, опирающийся на ту же дугу.

Подсказка к задаче №10.

К задаче

Постройте $B_1T \parallel CC_1$ и примените теорему Фалеса. $\triangle DBA_1 \sim \triangle B_1BC$.

Подсказка к задаче №11.

К задаче

M — точка пересечения высот $\triangle ANB$.

Подсказка к задаче №12.

К задаче

Воспользуйтесь свойством угла между касательной и хордой. $\triangle ACE \sim \triangle DCB$.

Подсказка к задаче №13.

К задаче

$\triangle BNM \sim \triangle BCA$.

Подсказка к задаче №14.

К задаче

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Подсказка к задаче №15.

К задаче

$\angle CDA = \angle BAD$. $MP \cdot PC = AP \cdot DP$.

Подсказка к задаче №16.

К задаче

$BPCH$ — параллелограмм, OT — средняя линия $\triangle APH$, четырехугольник $AMHC_1$ вписан в окружность.

Подсказка к задаче №17.

К задаче

$\triangle BCK \sim \triangle HNK$. По свойству хорд $AH \cdot DH = BH \cdot HK$ и $AN \cdot ND = NK \cdot CN$.

Подсказка к задаче №18.

К задаче

$ABCF$ — равнобедренная трапеция. AE — биссектриса $\angle BAD.ABCF$ — равнобедренная трапеция. AE — биссектриса $\angle BAD$.

Подсказка к задаче №19.

К задаче

Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды равны. $\triangle ABT$ — равнобедренный. $CDET$ — ромб.

Подсказка к задаче №20.

К задаче

$\triangle BED$ — равнобедренный. Точка E лежит на окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$.

Подсказка к задаче №21.

К задаче

$MCNH$ вписан в окружность. $\triangle ABC \sim \triangle ACH$. Примените теорему косинусов для $\triangle MCH$.

Подсказка к задаче №22.

К задаче

$\triangle ODA$, $\triangle ODC$, $\triangle BDM$ и $\triangle CDM$ равнобедренные. OM — средняя линия $\triangle ABC$.

Подсказка к задаче №23.

К задаче

OA — средняя линия $\triangle MNT$. $\triangle ONS = \triangle OTS$. $TN \perp OS$.

Подсказка к задаче №24.

К задаче

$AE = AP$, $BP = BD$, $CD = CE$. $\angle ACB = 90°$.

Подсказка к задаче №25.

К задаче

$\triangle AFE$ равнобедренный. Примените теорему синусов к $\triangle BFC$ и $\triangle AFE$.

Подсказка к задаче №26.

К задаче

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$. $AC + MN = AM + CN$. Если $D = AB \cap \omega$ и $F = BC \cap \omega$, то $BD = BF$.

Подсказка к задаче №27.

К задаче

Запишите теорему синусов для $\triangle ABM$. При решении полученной системы уравнений воспользуйтесь методом дополнительного угла.

Подсказка к задаче №28.

К задаче

$\triangle ABL \sim \triangle CBA$. $\triangle ALC$ равнобедренный. LE — биссектриса $\angle ALC$.

Подсказка к задаче №29.

К задаче

$ABCD$ вписан в окружность. $\triangle ABC \sim \triangle BTC$.

Подсказка к задаче №30.

К задаче

$\triangle ABC \sim \triangle C_1HK$. $\angle BAC = \angle BHC_1$.

Подсказка к задаче №31.

К задаче

$\angle BNM = \angle CBN$.

Подсказка к задаче №32.

К задаче

$BNKM$ вписан в окружность. Проведите $BP \parallel ND$. $L = AK \cap BP$. Тогда ML — средняя линия $\triangle ABK$. $\triangle ABK$ равнобедренный.

Подсказка к задаче №33.

К задаче

$\triangle ABD$ равнобедренный. $\triangle CKD \sim \triangle BED$. Проведите $FG \parallel DE$ и воспользуйтесь теоремой Фалеса.

Подсказка к задаче №34.

К задаче

Трапеция $AMNC$ вписана в окружность. Примените теорему синусов к $\triangle AMC$.

Подсказка к задаче №35.

К задаче

$BIDJ$ — ромб. Проведите в $\triangle ABC$ высоту $BH = h$. Выразите все длины через h.

Подсказка к задаче №36.

К задаче

Примените теорему о касательной и секущей. Пусть $S = CD \cap O_1O_2$. Тогда $\triangle O_1CS \sim \triangle O_2DS$.

Подсказка к задаче №37.

К задаче

$AEDO$ — параллелограмм. Высоты подобных треугольников относятся так же, как и их стороны.

Подсказка к задаче №38.

К задаче

$\triangle ABD$ равнобедренный. OB — биссектриса $\triangle ADB$.

Подсказка к задаче №39.

К задаче

Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую стягивает эта хорда. Стороны подобных треугольников относятся так же, как и радиусы описанных вокруг них окружностей. $BP^2 = BK \cdot BA$, $CP^2 = CM \cdot CA$.

Подсказка к задаче №40.

К задаче

$\triangle MON \sim \triangle BOC \sim \triangle BKN$.

Подсказка к задаче №41.

К задаче

$\triangle BEK = \triangle MEK$. $BC = CK + MK$. $\triangle AEM \sim \triangle CMK$.

Подсказка к задаче №42.

К задаче

$\frac{AM}{MB} = \operatorname{tg} \angle MAO$. Пусть CH — высота трапеции $ABCD$. Тогда $\triangle AHO = \triangle CHO$. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Подсказка к задаче №43.

К задаче

Пусть $K = MN \cap BC$. Тогда $\triangle MON \sim \triangle BOC \sim \triangle BKN$.

Подсказка к задаче №44.

К задаче

$\frac{AM}{MB} = \operatorname{tg} \angle MAO$. Пусть CH — высота трапеции $ABCD$. Тогда $\triangle AHO = \triangle CHO$. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Подсказка к задаче №45.

К задаче

$\triangle ALK = \triangle MKB$. $AL : CL = AB : BC$. $\triangle ABC \sim \triangle MBK$.

Подсказка к задаче №46.

К задаче

Четырехугольник AC_1HB_1 вписан в окружность. $\triangle AB_1C_1 \sim ACB$. $\frac{B_1C_1}{BC} = \cos \angle BAC$.

Подсказка к задаче №47.

К задаче

$AM \cdot DM = BM \cdot EM$.

Подсказка к задаче №48.

К задаче

$\angle CAE = \angle CEA$. $BCDM$ — параллелограмм. $AM \cdot DM = BM \cdot EM$.

Подсказка к задаче №49.

К задаче

Четырехугольник $AOBN$ вписан в окружность. Пусть $H = ON \cap AB$. Тогда OH — средняя линия $\triangle ABC$.

Подсказка к задаче №50.

К задаче

Четырехугольник $AOBN$ вписан в окружность. Пусть $H = ON \cap AB$. Тогда OH — средняя линия $\triangle ABC$.

Подсказка к задаче №51.

К задаче

$CF + AE = FE + AC$.

Подсказка к задаче №52.

К задаче

Четырехугольник $AMKC$ вписан в окружность. Четырехугольник $MEHK$ вписан в окружность. $\triangle ABC \sim \triangle KBM$. Пусть $T = AK \cap CM$. Тогда $\triangle MTK \sim ETH$.

Подсказка к задаче №53.

К задаче

$\frac{SB}{AB} = \frac{SC}{CD}$. $\frac{SE}{EA} = \frac{SC}{CH}$. BH — средняя линия $\triangle SDE$.

Подсказка к задаче №54.

К задаче

$\triangle A_1B_1C = \triangle BC_1A_1$. $O_BO_C \parallel BC$. $O_BTO_CA_1$ — ромб. AK и BK — диаметры ω_1 и ω_2 соответственно.

Подсказка к задаче №55.

К задаче

$\triangle PBN \sim \triangle CDN$ и $\triangle APM \sim \triangle CDM$. $S_{ABCD} = (\sqrt{S_{AEB}} + \sqrt{S_{CED}})^2$.

Подсказка к задаче №56.

К задаче

$8^2 + 15^2 = 17^2$. Проведите прямую, параллельную одной из диагоналей трапеции и постройте треугольник со сторонами 8, 15 и 17.

Подсказка к задаче №57.

К задаче

$\triangle ABM \sim \triangle CBA$ и $\triangle AOD \sim \triangle COB$.

Подсказка к задаче №58.

К задаче

$\angle APC = \angle AOC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Подсказка к задаче №59.

К задаче

Если медиана равна половине стороны, к которой проведена, угол, из которого проведена медиана, прямой.

Подсказка к задаче №60.

К задаче

$\triangle ABM$ — равносторонний. OM — средняя линия $\triangle ABD$. Точка K — точка пересечения медиан $\triangle ABD$.

Подсказка к задаче №61.

К задаче

LO — биссектриса $\angle KLM$ и MO — биссектриса $\angle LMN$.

Подсказка к задаче №62.

К задаче

$\triangle MAB = \triangle PBQ$.

Подсказка к задаче №63.

К задаче

$AC \perp BD$. $\triangle AKD \sim CKB$. $AK = \sqrt{BK \cdot DK}$.

РЕШЕНИЯ

Решение задачи №1.

К задаче

а) Дано:

$ABCD$ — выпуклый,
$M \in BC$,
$AB = MB$ (1),
$MC = DC$ (2),
$\angle AMD = 90^\circ$ (3),
BT — биссектриса $\triangle ABM$ (4),
CK — биссектриса $\triangle DCM$ (5),
$N_1 = BT \cap AD$,
$N_2 = CK \cap AD$.

а) Доказать:

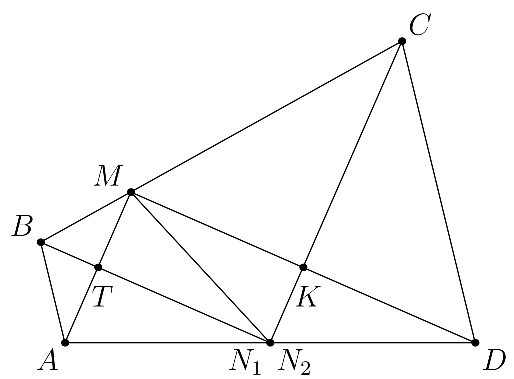
$N_1 = N_2$.

б) Дано:

$BM : MC = 1 : 3$ (6),
$S_{NTMK} = 18$ (7).

б) Найти:

$S_{ABCD} = ?$



а) Доказательство:

- BT — биссектриса равнобедренного $\triangle ABM$ с основанием AM [1, 4], а значит, $AT = MT$ (8) и $\angle BTM = 90^\circ$ (9). Имеем $\angle BTM = \angle AMD$ [3, 9]. Эти углы накрест лежащие при прямых TN_1 и MD, то есть $TN_1 \parallel MD$ (10). Значит, TN_1 — средняя линия $\triangle AMD$ [8, 10], откуда $AN_1 = DN_1$ (11).
- CK — биссектриса равнобедренного $\triangle MCD$ с основанием MD [2, 5], а значит, $MK = DK$ (12) и $\angle MKC = 90^\circ$ (13). Имеем $\angle MKC = \angle AMD$ [3, 13]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых KN_2 и AM, следовательно, $KN_2 \parallel AM$ (14). Значит, KN_2 — средняя линия $\triangle AMD$ [12, 14], откуда $AN_2 = DN_2$ (15). Обе точки N_1 и N_2 являются серединами отрезка AD [11, 15], а значит, совпадают, что и требовалось доказать. Обозначим $N_1 = N_2 = N$.

б) Решение:

- KN — средняя линия $\triangle AMD$, значит, $AT = MT = KN$ (16) [8, 14]. TN — средняя линия $\triangle AMD$, значит, $MK = DK = TN$ (17) [10, 12]. MN — медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе [3, 11], откуда $AN = DN = MN$ (18).
- По трем сторонам $\triangle ATN = \triangle MTN = \triangle MKN = \triangle DKN$ [16, 17, 18] и площадь каждого из указанных треугольников равна половине S_{NTMK}, то есть 9 [7]. Следовательно, $S_{AMN} = S_{MND} = 18$ (19).
- По теореме Фалеса получаем, что $NK : CK = BM : MC = 1 : 3$ [6, 10]. Следовательно, $S_{MCD} = 3 \cdot S_{MND}$, так как у этих треугольников общее основание, и высоты относятся $3 : 1$. Откуда $S_{MCD} = 54$ (20) [19].
- Аналогично по теореме Фалеса имеем $BT : NT = BM : MC = 1 : 3$ [6, 14]. Следовательно, $S_{ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{AMN}$, так как у этих треугольников общее основание, и высоты относятся $1 : 3$. Откуда $S_{ABM} = 6$ (21) [19].
- Итак, $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMN} + S_{MND} + S_{MCD} = 6 + 18 + 18 + 54 = 96$ [20, 21].

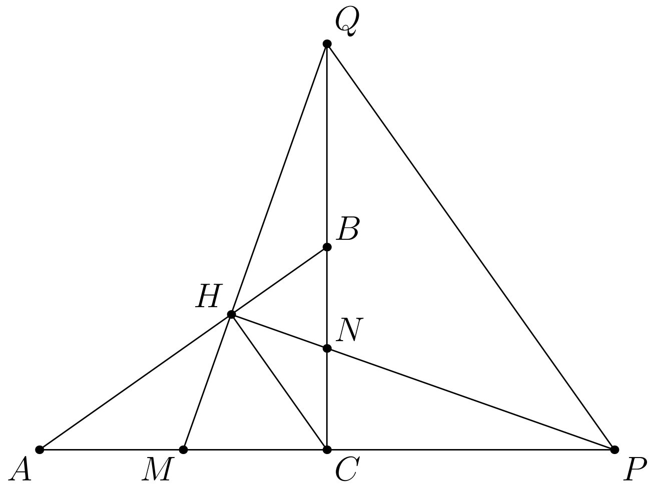
б) Ответ: 96.

а) Дано:
$\angle ACB = 90^\circ$ (1),
CH — высота $\triangle ABC$ (2),
$M \in AC$,
$N \in BC$,
$AM = CM$ (3),
$BN = CN$ (4),

а) Доказать:
$\angle MHN = 90^\circ$.

б) Дано:
$P = AC \cap NH$,
$Q = BC \cap MH$,
$AH = 4$ (5),
$BH = 2$ (6).

б) Найти:
$S_{PQM} = ?$



а) Доказательство:

- NH — медиана прямоугольного треугольника CHB, проведенная к гипотенузе [2, 4]. Значит, $BN = CN = HN$ (7). Аналогично для $\triangle AHC$ $AM = CM = HM$ (8) [1, 3].
- Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle BHN = \alpha$ [7], $\angle CHN = 90^\circ - \alpha$ (9) [2]. Далее $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$ [1], $\angle AHM = 90^\circ - \alpha$ [8], $\angle CHM = \alpha$ (10) [2].
- Получаем, что $\angle MNH = 90^\circ$ [9, 10], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- CH — высота, проведенная из прямого угла, значит, $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$, то есть $CH = 2\sqrt{2}$ (11) [5, 6].
- По теореме Пифагора для $\triangle BHC$ находим $BC = 2\sqrt{3}$ [2, 6, 11]. Следовательно, $BN = CN = HN = \sqrt{3}$ (12) [7]. Аналогично по теореме Пифагора для $\triangle AHC$ получаем $AM = CM = HM = \sqrt{6}$ (13) [2, 5, 8, 11].
- $\triangle MHP = \triangle MCQ$ (14) по двум углам и стороне ($\angle HCN$ общий) [1, 2, 8]. Откуда $MP = MQ$, $CP = HQ$ и $HP = CQ$. Обозначим $BQ = x$ (15). Тогда $NP = x + \sqrt{3}$ (16) [12]. Обозначим $CP = HQ = y$ (17).
- $\triangle MQC \sim \triangle NPC$ по двум углам [1, 4]. Следовательно, $\frac{MQ}{NP} = \frac{MC}{NC} = \frac{QC}{PC}$ (18).
- Решая систему уравнений [15, 16, 17, 18], находим $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{6}$. Откуда $QC = 4\sqrt{3}$ (19) [12, 15] и $MP = 3\sqrt{6}$ (20) [13, 17].
- $S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot QC \cdot MP = 18\sqrt{2}$ [19, 20].

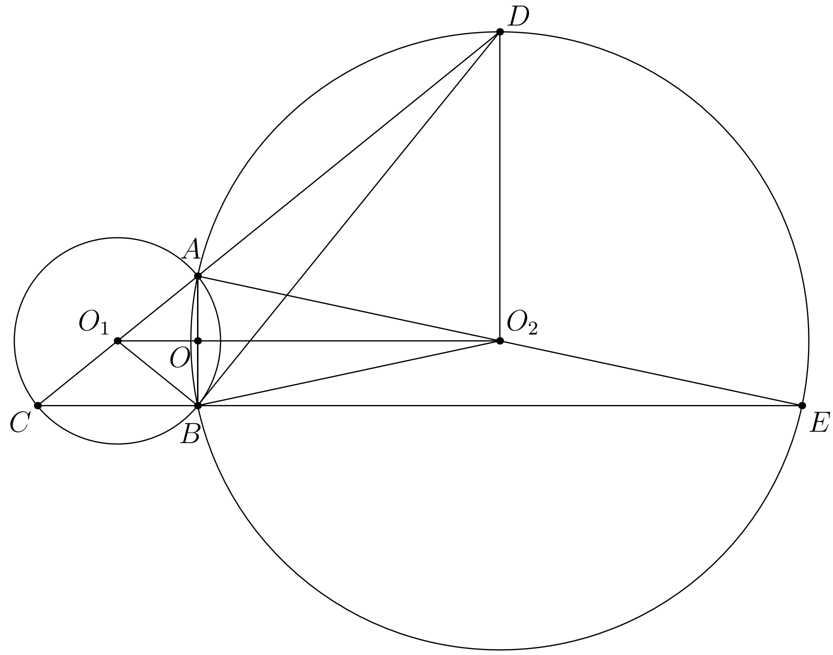
б) Ответ: $18\sqrt{2}$.

а) Дано:

$\omega_1(O_1)$ и $\omega_2(O_2)$ — окружности,
$A = \omega_1 \cap \omega_2$, $B = \omega_1 \cap \omega_2$,
AO_1BO_2 —выпуклый,
CA — диаметр ω_1 (1),
$D = CA \cap \omega_2$,
$E = CB \cap \omega_2$.

а) Доказать:

$\triangle CBD \sim \triangle O_1AO_2$.



б) Дано:

$\angle DAE = \angle BAC$ (2),
$O_2A = 3O_1A$ (3),
$AB = 3$ (4).

б) Найти:

$AD = ?$

а) Доказательство:

- Пусть $O = AB \cap O_1O_2$. $O_1A = O_1B$ и $O_2A = O_2B$ как радиусы. Следовательно, $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$ по трём сторонам. Откуда $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$. Значит, O_1O — биссектриса равнобедренного треугольника AO_1B. То есть $\angle O_1OA = 90°$ (5).
- $\angle CBA = 90°$ [1]. Следовательно, $\angle CBA = \angle O_1OA$ [5]. Эти углы являются соответственными при прямых O_1O_2 и CE, значит, $O_1O_2 \parallel CE$. Откуда $\angle DCB = \angle AO_1O_2$ (6) и $\angle AO_2O_1 = \angle AEB$ (7) как соответственные.
- $\angle ADB = \angle AEB$, так как они вписанные и опираются на одну дугу AB. Откуда $\angle AO_2O_1 = \angle ADB$ (8) [7]. Следовательно, $\triangle CBD \sim \triangle O_1AO_2$ по двум углам [6, 8], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $O_1A = O_1B$ и $O_2A = O_2D$ как радиусы. Значит, треугольники AO_1B и AO_2D равнобедренные. Следовательно, $\angle O_1BA = \angle BAC = \angle DAE = \angle O_2DA$ (9) [2].
- $\triangle ABO_1 \sim ADO_2$ по двум углам [9]. Откуда $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{AB}{AD}$. Из этого соотношения находим $AD = 9$ [3, 4].

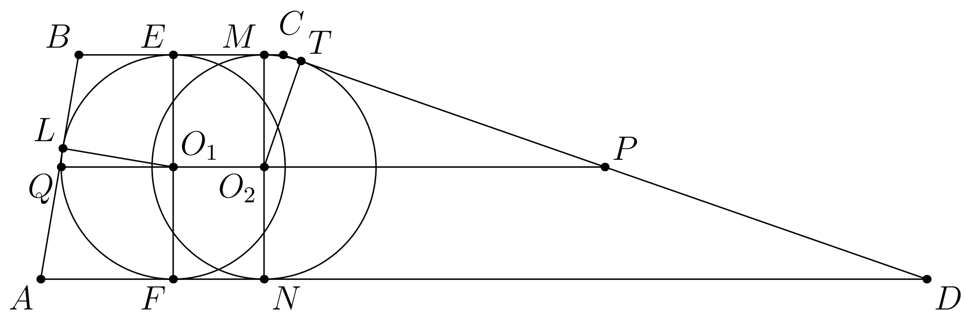
б) Ответ: 9.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$\omega_1(O_1)$ и $\omega_2(O_2)$ — окружности,
$E = \omega_1 \cap BC$, $F = \omega_1 \cap AD$,
$L = \omega_1 \cap AB$, $M = \omega_2 \cap BC$,
$N = \omega_2 \cap AD$, $T = \omega_2 \cap CD$,
E, F, L — точки касания ω_1 (2),
M, N, T — точки касания ω_2 (3).

а) Доказать:
$O_1O_2 \parallel ME$.

б) Дано:
$AB = 10$ (4); $BC = 9$ (5);
$CD = 30$ (6); $AD = 39$ (7);

б) Найти:
$O_1O_2 = ?$



а) Доказательство:

- Докажем, что точки E, O_1 и F лежат на одной прямой. Предположим противное. Пусть $E' = FO_1 \cap BC$. $\angle AFO_1 = 90°$, так как F — точка касания [2]. Тогда $\angle FE'E = \angle AFO_1 = 90°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [1]. $\angle O_1EB = 90°$, так как E — точка касания [2]. Мы получаем противоречие: из точки O_1 на прямую BC опущено два перпендикуляра O_1E и O_1E'. Аналогично показывается, что точки M, O_2, N лежат на одной прямой.
- $O_1E = O_1F$ (8) и $O_2M = O_2N$ (9) как радиусы. При этом $ME \parallel NF$. Откуда по теореме, обратной теореме Фалеса, заключаем, что $O_1O_2 \parallel ME$ (10) требовалось доказать.

б) Решение:

- По свойству двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем $AL = AF$, $BL = BE$ [2]. Следовательно, $BE + AF = BL + AL = AB = 10$ [4]. Пусть $Q = O_1O_2 \cap AB$. Тогда O_1Q — средняя линия трапеции $ABEF$ [8, 10]. Получаем, что $O_1Q = \frac{BE+AF}{2} = 5$ (11).
- По свойству двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем $DT = DN$, $CT = CM$ [3]. Следовательно, $DN + CM = DT + CT = CD = 30$ [6]. Пусть $P = O_1O_2 \cap CD$. Тогда O_2P — средняя линия трапеции $DCMN$ [9, 10], и $CP = DP$ (12). Получаем, что $O_2P = \frac{DN+CM}{2} = 15$ (13).
- QP — средняя линия трапеции $ABCD$ [10, 12]. Находим, что $QP = \frac{AD+BC}{2} = 24$ [5, 7]. Тогда $O_1O_2 = QP - O_1Q - O_2P = 4$ [11, 13].

б) Ответ: 4.

а) Дано:

$\triangle ABC$ вписан в окружность $\omega(O, R)$,
BN — диаметр ω (1),
BH — высота $\triangle ABC$,
$K = BH \cap \omega$,
$ON = OB$ (2),
$\angle BHC = 90°$ (3),
$\angle BAC = 35°$ (4),
$\angle ACB = 65°$ (5).

а) Доказать:

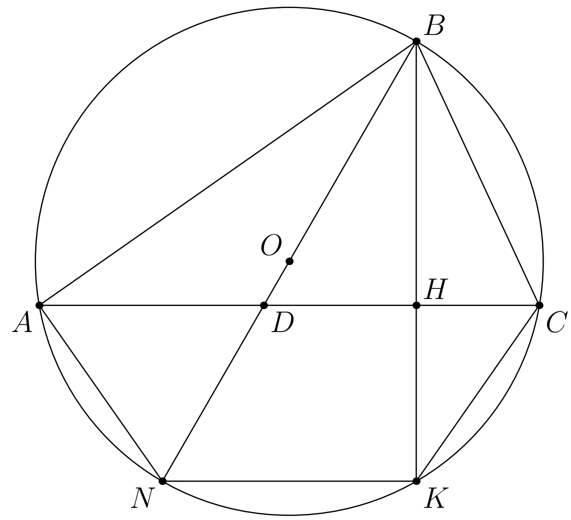
$AN = CK$.

б) Дано:

$R = 12$ (6).

б) Найти:

$KN = ?$



а) Доказательство:

- По сумме углов прямоугольного $\triangle BHC$ находим, что $\angle CBH = 25°$ (7) [3; 5].
- $\angle BAN = 90°$ (8) и $\angle NKB = 90°$ (9), так как они опираются на диаметр BN [1]. Откуда $\angle CAN = \angle BAN - \angle BAC = 55°$ (10) [4].
- Дуга $KC = 2\angle CBK = 50°$ [7]. Дуга $NC = 2\angle CAN = 110°$ [10]. Откуда дуга $NK = NC - KC = 60°$, и $\angle KBN = \frac{1}{2}NK = 30°$ (11).
- По сумме углов прямоугольного $\triangle BDH$ находим $\angle BDH = 60°$ [3, 11]. $\angle ADB = 180° - \angle BDH = 120°$. Далее по сумме углов $\triangle ABD$ имеем $\angle ABD = 25°$ (12) [4].
- $\angle ABN = \angle CBK = 25°$ [7, 12]. Равные углы опираются на равные хорды, следовательно, $AN = CK$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- В прямоугольном $\triangle BNK$ $\angle KBN = 30°$ [9, 11]. Значит, $KN = \frac{1}{2}BN = OB = 12$ [2, 6].

б) Ответ: 12.

а) Дано:

$A_1 \in BC$,
$B_1 \in AC$,
$C_1 \in AB$,
$AB_1 = CB_1$ (1),
$AC_1 = BC_1$ (2),
$BA_1 = CA_1$ (3),
AH — высота $\triangle ABC$ (4),
$\angle BAC = 60°$ (5),
$\angle BCA = 45°$ (6).

а) Доказать:

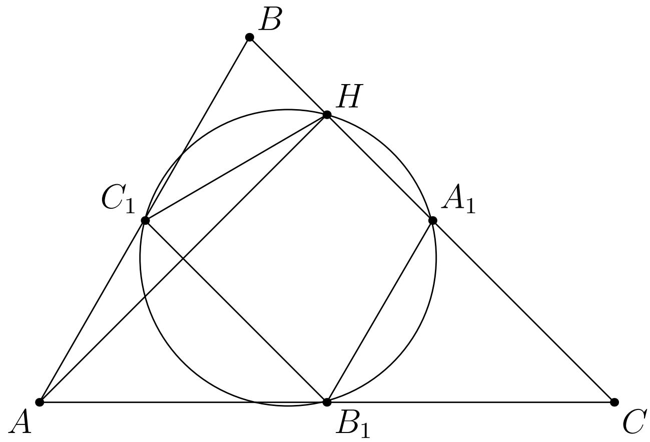
Четырехугольник $A_1B_1C_1H$ вписан в окружность.

б) Дано:

$BC = 2\sqrt{3}$ (7).

б) Найти:

$A_1H = ?$



а) Доказательство:

- A_1B_1 — средняя линия $\triangle ABC$ [1, 3], то есть $A_1B_1 \parallel AB$. Значит, $\angle A_1B_1C = \angle BAC = 60°$ как соответственные [5]. $\angle BA_1B_1 = \angle A_1B_1C + \angle BCA = 105°$ (8) как внешний для $\triangle A_1B_1C$ [6].

- B_1C_1 — средняя линия $\triangle ABC$ [1, 2], то есть $B_1C_1 \parallel BC$. Значит, $\angle C_1B_1A = \angle BCA = 45°$ как соответственные [6]. $\angle BC_1B_1 = \angle C_1B_1A + \angle BAC = 105°$ (9) как внешний для $\triangle C_1B_1A$ [5].

- C_1H — медиана в прямоугольном $\triangle AHB$ [2, 4]. Следовательно, $BC_1 = HC_1$. Откуда по сумме углов $\triangle ABC$ $\angle BHC_1 = \angle HBC_1 = 75°$ [5, 6]. По сумме углов $\triangle BHC_1$ находим $\angle BC_1H = 30°$ (10).

- $\angle HC_1B_1 = \angle BC_1B_1 - \angle BC_1H = 75°$ [9, 10]. Получаем, что $\angle BA_1B_1 + \angle HC_1B_1 = 180°$ [8]. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1H$ вписан в окружность, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По теореме синусов в $\triangle ABC$ имеем $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$. Откуда находим $AB = 2\sqrt{2}$ (11) [5, 6, 7].

- $\triangle AHC$ прямоугольный и равнобедренный [4, 6]. Значит, $AH = CH$. Обозначим $A_1H = x$. Тогда $AH = \sqrt{3} + x$, $BH = \sqrt{3} - x$ (12) [3, 7].

- По теореме Пифагора в $\triangle AHB$ имеем $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Откуда находим $A_1H = x = 1$ [4 ,11, 12].

б) Ответ: 1.

а) Дано:

$ABCD$ — прямоугольник (1),
$AD : CD = 3 : 1$ (2),
AD — диаметр окружности ω (3),
$N = AC \cap \omega$,
$M = BD \cap \omega$.

а) Доказать:

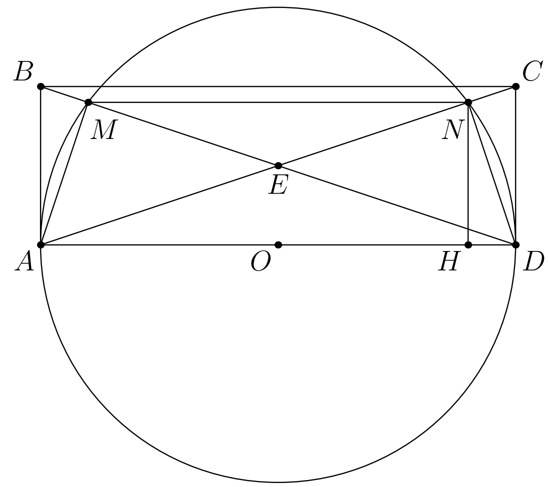
$MN \parallel AD$.

б) Дано:

$AD = 6$ (4).

б) Найти:

$S_{AMND} = ?$



а) Доказательство:

- $\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними [1]. $\angle AMD = \angle DNA = 90^\circ$ (5), так как они опираются на диаметр AD [2]. Следовательно, $AM = DN$ (6) как высоты равных треугольников.

- $\angle ADM = \angle DMN$, так как они опираются на равные хорды AM и DN [5]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых MN и AD. Следовательно, $MN \parallel AD$ (7), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $CN = x$ и $AN = kx$. Тогда $DN = \sqrt{k}x$ как высота, проведенная из прямого угла [1, 5]. Эта высота делит $\triangle ACD$ на два подобных треугольника $\triangle AND \sim \triangle DNC$. Из этого подобия имеем $\sqrt{k} = \frac{AN}{DN} = \frac{AD}{CD} = 3$ [3]. Отсюда $k = 9$. Таким образом, $AN = 9CN$ (8). Пусть $E = AC \cap BD$. Тогда $AE = CE$, так как E — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Следовательно, $NE : AE = 4 : 5$ (9) [8].

- Пусть NH — высота $\triangle AND$. Тогда $\triangle ANH \sim \triangle ACD$ по двум углам, так как $\angle CAD$ у них общий. Имеем $\frac{CD}{NH} = \frac{AC}{AN} = \frac{10}{9}$ [8]. По условию $CD = \frac{AD}{3} = 2$ [3, 4]. Следовательно, $NH = \frac{9}{5}$ (10).

- $AMND$ — трапеция [7]. Значит, $\triangle NEM \sim \triangle AED$. Откуда $\frac{NM}{AD} = \frac{NE}{AE} = \frac{4}{5}$ [9]. Находим, что $NM = \frac{24}{5}$ (11) [4].

- $S_{AMND} = \frac{AD+NM}{2} \cdot NH = \frac{243}{25}$.

б) Ответ: $\frac{243}{25}$.

а) Дано:

$ABCD$ вписан в окружность ω (1),
$AC \perp BD$ (2),
$E = AC \cap BD$,
$N \in AB$,
$NE \perp AB$ (3),
$M = NE \cap CD$

а) Доказать:

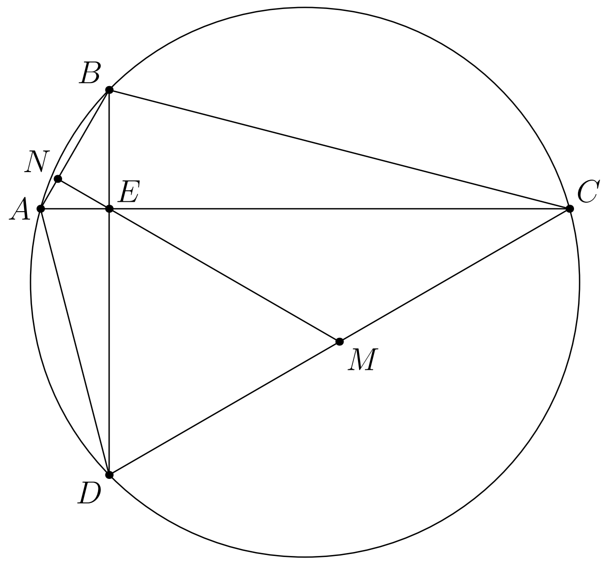
$DM = CM$.

б) Дано:

$AD = 8$ (4),
$AB = 4$ (5),
$\angle BDC = 60^\circ$ (6),

б) Найти:

$EM = ?$



а) Доказательство:

- Обозначим $\angle BDC = \alpha$. Тогда $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ (7), так как они вписанные и опираются на одну дугу BC [2]. По сумме углов прямоугольного $\triangle ANE$ находим $\angle AEN = 90^\circ - \alpha$. Откуда $\angle CEM = \angle AEN = 90^\circ - \alpha$ (8) как вертикальные. Наконец $\angle DEM = 90^\circ - \angle CEM = \alpha$ [1]. Таким образом, $\triangle DEM$ равнобедренный, и $DM = EM$ (9).

- По сумме углов прямоугольного $\triangle ABE$ имеем $\angle ABD = 90^\circ - \alpha$ [7]. Следовательно, $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ - \alpha$ (10), так как они вписанные и опираются на одну дугу AD [2]. Получаем, что $\triangle CEM$ равнобедренный и $EM = CM$ (11) [8]. Следовательно, $DM = CM$ [9, 11], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- В прямоугольном треугольнике AED $\angle ABD = 30^\circ$ [1, 6, 10]. Следовательно, $AE = \frac{1}{2}AB = 2$ (12) [5].

- По теореме Пифагора для $\triangle AED$ имеем $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 2\sqrt{15}$ (13) [4, 12].

- В равнобедренном $\triangle DEM$ $\angle BDC = 60^\circ$, значит, $\triangle DAE$ — равносторонний, и $EM = DE = 2\sqrt{15}$ [9, 13].

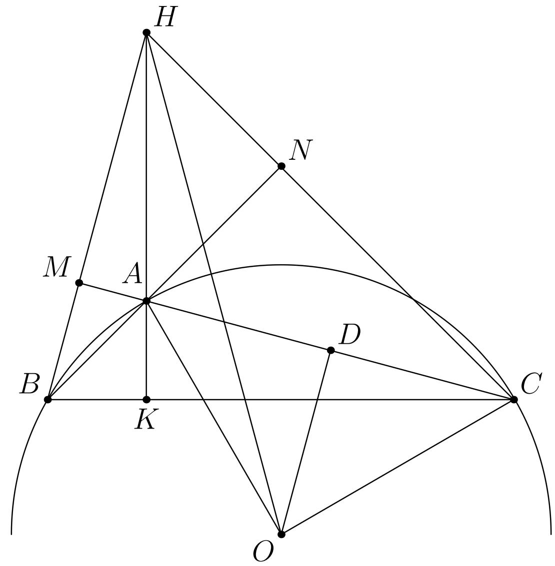
б) Ответ: $2\sqrt{15}$.

а) Дано:
$\triangle ABC$ вписан в окружность $\omega(O)$, $\angle BAC = 120°$ (1), BM и CN — высоты $\triangle ABC$ (2), $H = BM \cap CN$.

а) Доказать:
$AH = AO$.

б) Дано:
$BC = \sqrt{15}$ (3), $\angle ABC = 45°$ (4).

б) Найти:
$S_{AHO} = ?$



а) Доказательство:

- Пусть $K = HA \cap BC$. Так как A — точка пересечения высот $\triangle BHC$, то $\angle BKH = 90°$ (5).
- Обозначим вписанный $\angle ABC = \alpha$ (6). Тогда $\angle AOC = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу AC. $OA = OC$ как радиусы. Пусть D — середина AC (7). Тогда OD — медиана равнобедренного $\triangle AOC$, а значит, его биссектриса и высота. То есть $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$ и $\angle ADO = 90°$ (8). Далее по сумме углов прямоугольного $\triangle ADO$ находим $\angle OAD = 90° - \alpha$ (9).
- По сумме углов прямоугольного $\triangle AKB$ находим $\angle BAK = 90° - \alpha$ [5, 6]. Откуда $\angle NAH = \angle BAK = 90° - \alpha$ (10) как вертикальные.
- $\angle NAC = 180° - \angle BAC = 60°$ (11) [1]. По сумме углов прямоугольного $\triangle NAC$ находим $\angle ACN = 30°$. Следовательно, $AC = 2AN$, то есть $AN = AD$ (12) [7].
- $\triangle AHN = \triangle AOD$ по стороне и двум углам [2, 8, 9, 10, 12]. Откуда $AH = AO$ (13), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle OAH = \angle NAH + \angle NAC + \angle OAD = 240° - 2\alpha$ [9, 10, 11]. Находим $\angle OAH = 150°$ (14) [4, 6].
- По теореме синусов для $\triangle ABC$ имеем $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$. Откуда находим $AC = \sqrt{10}$ [1, 3, 4]. Значит, $AD = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (15) [7].
- $\triangle ADO$ — равнобедренный прямоугольный [4, 6, 8, 9]. Откуда $OD = AD = \frac{\sqrt{10}}{2}$ [15]. По теореме Пифагора для $\triangle ADO$ имеем $AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{5}$ (16).
- $S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AH \cdot \sin\angle OAH = \frac{5}{4}$ [13, 14, 16].

б) Ответ: $\frac{5}{4}$.

а) Дано:

$A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$,
$AC_1 : C_1B = 7 : 12$ (1),
$BA_1 : A_1C = 3 : 1$ (2),
$AB_1 : B_1C = 3 : 4$ (3),
$D = BB_1 \cap CC_1$.

а) Доказать:

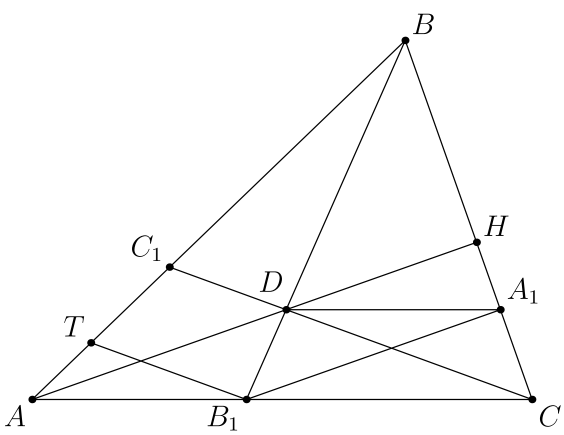
ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Дано:

$AD \perp BC$ (4),
$AC = 21$ (5),
$BC = 16$ (6).

б) Найти:

$CD = ?$



а) Доказательство:

- Пусть $T \in AB$ такая, что $B_1T \parallel CC_1$. По теореме Фалеса для прямых AC и AB имеем $AT : TC_1 = AB_1 : B_1C = 3 : 4$ [3]. Откуда $BC_1 : C_1T = 12 : 4 = 3 : 1$ [1]. Применим теорему Фалеса еще раз для прямых BA и BB_1. Получим $BD : DB_1 = BC_1 : C_1T = 3 : 1$ (7).

- Имеем $BD : DB_1 = BA_1 : A_1C = 3 : 1$ [2, 7]. Следовательно, по теореме,обратной теореме Фалеса, получаем $DA_1 \parallel B_1C$ (8).

- $\triangle DBA_1 \sim B_1BC$ по двум углам [8]. Откуда $\frac{DA_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{3}{4}$ (9) [2].

- Получаем, что $DA_1 = \frac{3}{4}B_1C = AB_1$ [3, 9]. Следовательно, ADA_1B_1 — параллелограмм (10), так как его противоположные стороны параллельны и равны [8], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть $H = AD \cap BC$. Так как ADA_1B_1 параллелограмм, то $AH \parallel B_1A_1$ (11). По теореме Фалеса для прямых CA и CB имеем $HA_1 : A_1C = AB_1 : B_1C = 3 : 4$ [3]. Откуда находим, что $BH : HA_1 : A_1C = 9 : 3 : 4$ [2]. А значит, $HA_1 = \frac{3}{16}BC = 3$ (12) и $HC = \frac{7}{16}BC = 7$ (13) [6].

- Находим, что $B_1C = \frac{4}{7}AC = 12$ [3, 5]. Далее $DA_1 = \frac{3}{4}B_1C = 9$ (14) [9].

- По теореме Пифагора для $\triangle DHA_1$ имеем $DH = \sqrt{DA_1^2 - HA^2} = 6\sqrt{2}$ [4, 12, 14]. По теореме Пифагора для $\triangle DHC$ получаем $CD = \sqrt{DH^2 + HC^2} = 11$ [4, 13].

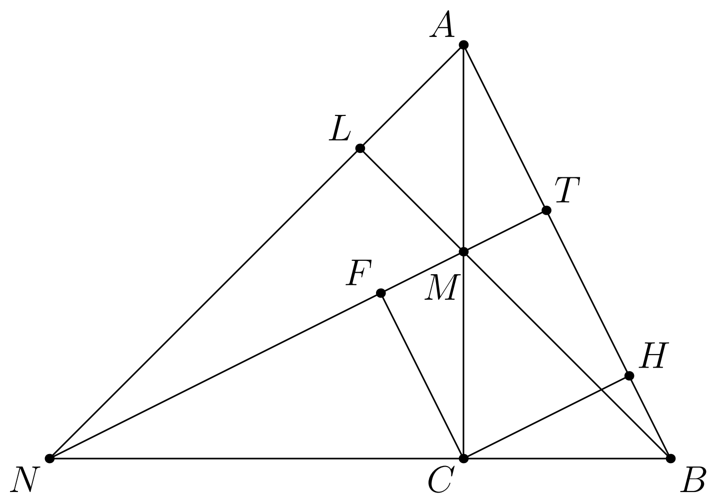
б) Ответ: 11.

а) Дано:
$\angle ACB = 90°$ (1),
$M \in AC$,
$C \in BN$,
$CM = BC$ (2),
$CN = AC$ (3),
CH — высота $\triangle ACB$ (4),
CF — высота $\triangle NCM$ (5),
$L = BM \cap AN$.

а) Доказать:
$CH \perp CF$.

б) Дано:
$BC = 4$ (6),
$AC = 8$ (7).

б) Найти:
$LM = ?$



а) Доказательство:

- Треугольник BMC прямоугольный равнобедренный [1, 2]. Откуда $\angle CMB = 45°$. Далее $\angle LMA = \angle CMB = 45°$ (8) как вертикальные.
- Треугольник ANC прямоугольный равнобедренный [1, 3]. Откуда $\angle CAN = 45°$ (9). По сумме углов треугольника ALM находим $\angle ALM = 90°$ [8], то есть BL — высота $\triangle ANB$ (10).
- Пусть $T = NM \cap AB$. M — точка пересечения высот $\triangle ANB$ [1, 10]. Следовательно, NT — высота, и $\angle NTB = 90°$ (11).
- $\angle CHB = \angle NTB = 90°$ [4, 11]. Эти углы являются соответственными при прямых CH и FT. Значит, $CH \parallel FT$. Следовательно, $\angle FCH = 180° - \angle TFC = 90°$ [5] как внутренние односторонние углы при параллельных прямых FT и CH. Таким образом, $CH \perp CF$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $AM = AC - MC = AC - BC = 4$ (12) [2, 6, 7].
- $\triangle ALM$ прямоугольный равнобедренный [9, 10]. Значит, $LM = AL$. По теореме Пифагора для $\triangle ALM$ имеем $AL^2 + LM^2 = AM^2$, откуда находим $LM = 2\sqrt{2}$ [12].

б) Ответ: $2\sqrt{2}$.

а) Дано:

FG — общая касательная окружностей $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$ в точке C (1),
$r_1 < r_2$,
$B \in \omega_1$, $A \in \omega_2$,
$\angle ACB = 90°$ (2),
$BC = AC$ (3),
$D = AC \cap \omega_1$,
$E = BC \cap \omega_2$.

а) Доказать:

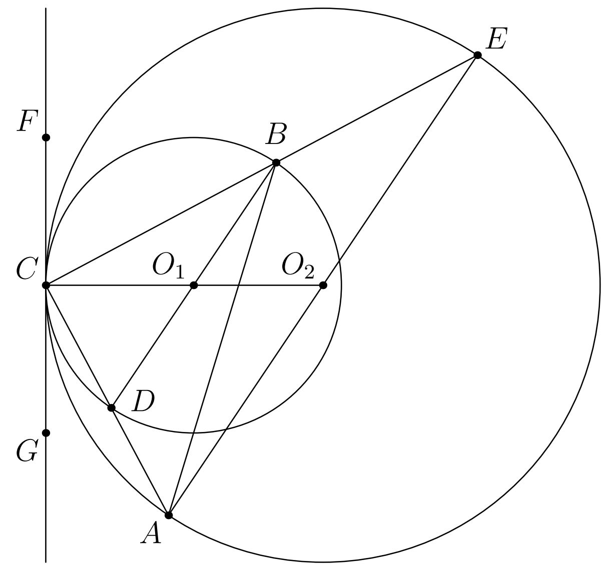
$AE \parallel BD$.

б) Дано:

$O_1C = 8$ (4),
$O_2C = 15$ (5).

б) Найти:

$AC = ?$



а) Доказательство:

- $\angle FCE$ — угол между касательной FC и хордой CE [1]. Следовательно, дуга $CE = 2\angle FCE$. Значит, $\angle CAE = \angle FCE$ (6), так как он вписанный и опирается на дугу CE.
- $\angle FCE$ — также угол между касательной FC и хордой CB [1]. Следовательно, дуга $CB = 2\angle FCE$. Значит, $\angle CDB = \angle FCE$, так как он вписанный и опирается на дугу CB. Делаем вывод, что $\angle CAE = \angle CDB$ (7). Эти углы являются соответственными при прямых AE и BD, следовательно, $AE \parallel BD$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\triangle ACE \sim \triangle DCB$ по двум углам, так как $\angle ACE$ у них общий [7]. Получаем соотношение $\frac{AC}{DC} = \frac{AE}{DB} = \frac{15}{8}$ (8). [4, 5].
- Обозначим $BC = AC = 15x$ (9) [3]. Тогда $DC = \frac{7}{15}AC = 7x$ [8]. По теореме Пифагора для треугольника DCB имеем $DB^2 = DC^2 + BC^2$, где $DB = 2O_1C = 16$ как диаметр [2, 4]. Отсюда находим $x = \frac{16}{17}$ (10).
- $AC = 15x = \frac{240}{17}$ [9, 10].

б) Ответ: $\frac{240}{17}$.

а) Дано:

$\angle ACB = 90^\circ$ (1),
CK — биссектриса $\triangle ABC$ (2),
$\triangle ABC$ вписан в окружность ω,
$L = CK \cap \omega$,
$N \in AB$,
$AN = BN$ (3),
$M \in BC$,
$M = LN \cap BC$.

а) Доказать:

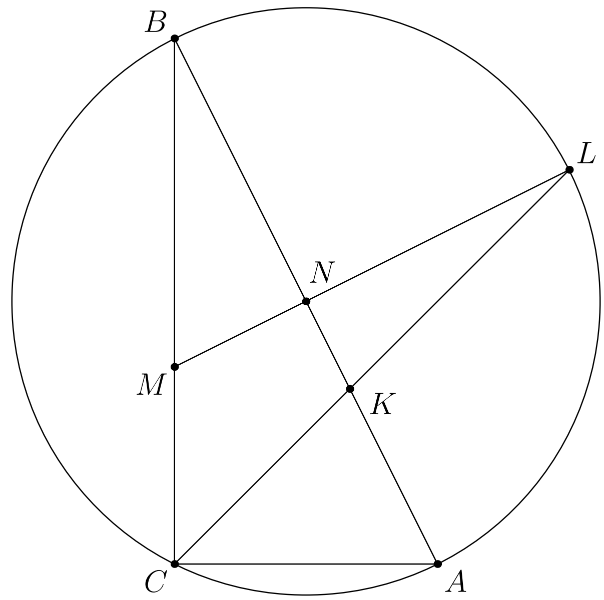
$\angle BML = \angle BAC$.

б) Дано:

$AB = 20$ (4),
$CM = 3\sqrt{5}$ (5).

б) Найти:

$S_{ABC} = ?$



а) Доказательство:

- Точка N — середина гипотенузы $\triangle ABC$ [1, 3], а значит, и центр описанной вокруг него окружности. $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$ [1, 2]. $\angle BNL = 2\angle BCL = 90^\circ$ (6) как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну дугу BL.

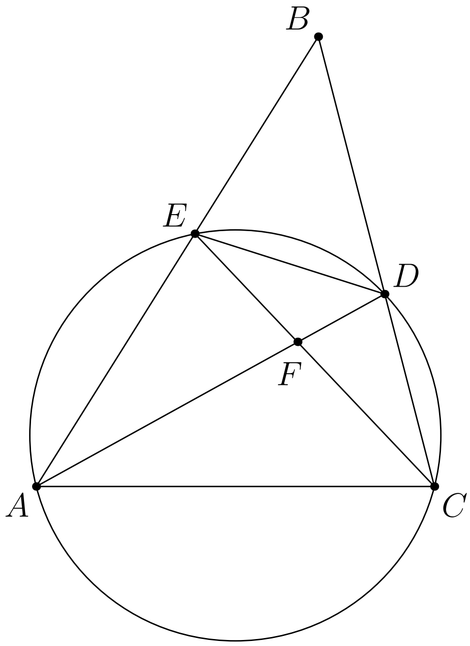
- $\angle BNM = 90^\circ$ как смежный с прямым $\angle BNL$ [6]. Следовательно, $\triangle BNM \sim \triangle BCA$ (7) по двум углам, так как $\angle CBA$ у них общий [1]. Откуда делаем вывод, что $\angle BML = \angle BAC$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $BM = x$. Из подобия $\triangle BNM \sim \triangle BCA$ имеем $\frac{BC}{BN} = \frac{BA}{BM}$ [7]. Получаем уравнение $\frac{x+3\sqrt{5}}{10} = \frac{20}{x}$ [3, 4, 5]. Решив его, находим, $BM = x = 5\sqrt{5}$ (8).

- $BC = BM + CM = 8\sqrt{5}$ [5, 8]. По теореме Пифагора для $\triangle BCA$ имеем $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4\sqrt{5}$ [4]. Далее находим искомую площадь: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = 80$.

б) Ответ: 80.



а) Дано:

AD — биссектриса $\triangle BAC$ (1),
$\triangle ADC$ — вписан в окружность ω,
$E = AB \cap \omega$ (2),
$F = AD \cap CE$.

а) Доказать:

$\triangle CDE$ — равнобедренный.

б) Дано:

$AB = 8$ (3),
$BC = 7$ (4),
$AC = 6$ (5).

б) Найти:

$S_{CDE} = ?$

а) Доказательство:

- $\angle DAC = \angle DEC$ (6), так как они вписанные и опираются на одну дугу DC [2]. Аналогично $\angle DAE = \angle DCE$ (7), так как они вписанные и опираются на одну дугу DE [2].
- $\angle DAC = \angle DAE$ [1]. Значит, $\angle DEC = \angle DCE$ [6, 7]. Откуда $\triangle CDE$ равнобедренный (8), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По условию $CD + BD = BC = 7$ [4]. По свойству биссектрисы AD имеем $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{6}$ [3, 5]. Решив полученную систему уравнений, находим $BD = 4$ и $CD = 3$ (9).
- По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$. Откуда находим $\cos\angle BAC = \frac{17}{32}$ (10) [3, 4, 5].
- Так как четырехугольник $AEDC$ вписан в окружность [2], то $\angle CDE = 180° - \angle BAC$. Откуда $\sin\angle CDE = \sin\angle BAC = +\sqrt{1 - \cos^2\angle BAC}$. Здесь знак плюс выбран, так как значение синуса угла, меньшего 180°, положительно. Таким образом находим, что $\sin\angle CDE = \frac{7\sqrt{15}}{32}$ (11) [10].
- $S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE = \frac{63\sqrt{15}}{64}$ [8, 9, 11].

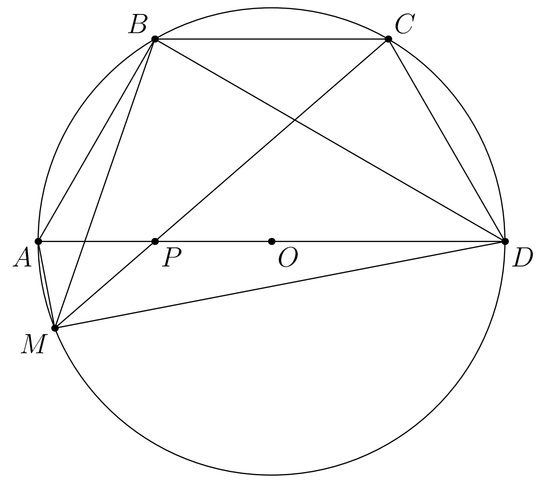
б) Ответ: $\frac{63\sqrt{15}}{64}$.

а) Дано:
$ABCD$ — трапеция, вписанная в окружность $\omega(O)$ (1),
AD — диаметр ω (2),
$\angle ABC = 120°$ (3),
$P \in AD$,
$M = CP \cap \omega$.

а) Доказать:
$\angle CMB = \angle AMB$.

б) Дано:
$AO = 8$ (4),
$AP = 4$ (5).

б) Найти:
$S_{PMD} = ?$



а) Доказательство:

- $AD \parallel BC$ [1]. Значит, $\angle BAD = 180° - \angle ABC = 60°$ как внутренние односторонние углы при параллельных прямых AD и BC. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, следовательно, $\angle CDA = \angle BAD = 60°$ (6) [1].
- $\angle ABD = 90°$ (7), так как он опирается на диаметр AD [2]. Значит $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 30°$ [3]. Далее, $\angle ADB = \angle CBD = 30°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC [1]. Получаем, что $\angle CDB = \angle ADB = 30°$ (8) [6].
- Дуги $BC = AB = 2\angle CDB = 60°$, так как ни них опираются равные углы [8]. Откуда $\angle CMB = \angle AMB = \frac{1}{2}AB$ как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Итак, $\angle CMB = \angle AMB = 30°$ (9), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- В прямоугольном $\triangle ABD$ $\angle ADB = 30°$ [7, 8]. Откуда получаем, что $AB = \frac{1}{2}AD = AO = 8$ [2, 4]. Так как трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная. Следовательно, $CD = AB = 8$ (10).
- $PD = AD - AP = 12$ (11) [2, 4, 5]. По теореме косинусов для $\triangle CDP$ имеем $PC = \sqrt{CD^2 + PD^2 - 2 \cdot CD \cdot PD \cdot \cos\angle CDA}$. Вычисляя, получаем $PC = 4\sqrt{7}$ (12) [6, 10, 11].
- По теореме синусов для $\triangle CDP$ имеем $\frac{CD}{\sin\angle CPD} = \frac{CP}{\sin\angle CDA}$. Из этого уравнения находим, что $\sin\angle CPD = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ [6, 10, 12]. При этом $\sin\angle MPD = \sin\angle CPD$, так как эти углы смежные. Таким образом, $\sin\angle MPD = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ (13).
- По свойству пересекающихся хорд $MP \cdot PC = AP \cdot DP$. Из этого уравнения находим $MP = \frac{12\sqrt{7}}{7}$ (14) [5, 11, 12].
- $S_{PMD} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot PD \cdot \sin\angle MPD = \frac{72\sqrt{3}}{7}$ [11, 13, 14].

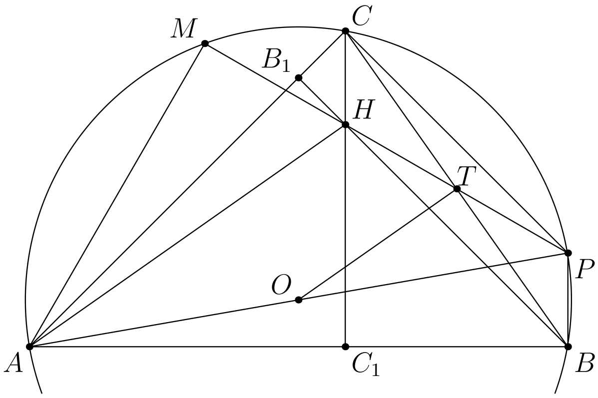
б) Ответ: $\frac{72\sqrt{3}}{7}$.

а) Дано:
BB_1 и CC_1 — высоты $\triangle ABC$ (1),
$H = BB_1 \cap CC_1$,
$\triangle ABC$ вписан в окружность $\omega(O)$,
AP — диаметр ω (2),
$T = PH \cap BC$,
$M = PH \cap \omega$.

а) Доказать:
$BT = CT$.

б) Дано:
$\rho(O, BC) = 4$ (3),
$\angle BPH = 120°$ (4).

б) Найти:
$MC_1 = ?$



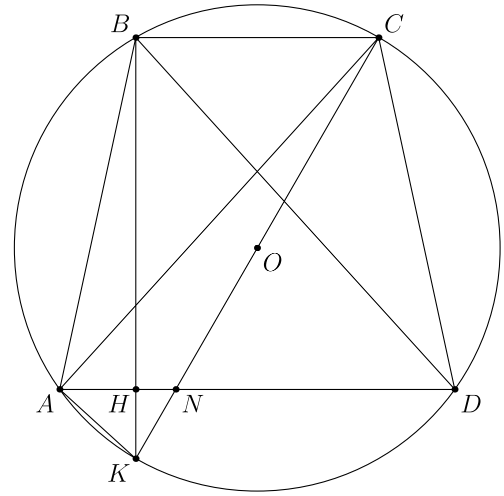
а) Доказательство:

- $\angle ABP = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр AP [2]. $\angle AC_1C = 90°$, так как CC_1 — высота [1]. Получаем, что $\angle AC_1C = \angle ABP$. Эти углы являются соответственными при прямых CH и BP. Следовательно, $CH \parallel BP$ (5).
- $\angle ACP = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр AP [2]. $\angle AB_1B = 90°$, так как BB_1 — высота [1]. Получаем, что $\angle AB_1B = \angle ACP$. Эти углы являются соответственными при прямых BH и CP. Следовательно, $BH \parallel CP$ (6).
- Стороны четырехугольника $BPCH$ попарно параллельны [5, 6]. Значит, $BPCH$ — параллелограмм (7). Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, откуда и $BT = CT$ (8), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $OC = OB$ как радиусы ω [2]. Значит, $\triangle OBC$ — равнобедренный. Тогда его медиана OT является высотой [8]. Откуда $OT = \rho(O, BC) = 4$ (9) [3].
- $OA = OP$ как радиусы ω [2]. $PT = HT$, так как T — точка пересечения диагоналей параллелограмма [7]. Следовательно, OT — средняя линия $\triangle APH$. То есть $AH = 2OT = 8$ (10) [9].
- $\angle AMP = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр AP [2]. $\angle AC_1C = 90°$, так как CC_1 — высота [1]. $\angle AMP + \angle AC_1C = 180°$, следовательно, $AMHC_1$ вписан в окружность с диаметром $d = AH = 8$ (11) [10].
- $\angle CHP = \angle BPH = 120°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых [4 ,5]. $\angle MHC_1 = \angle CPH = 120°$ как вертикальные. $\angle MAC_1 = 180° - \angle MHC_1 = 60°$ (12) [11].
- По теореме синусов для $\triangle MAC_1$ имеем $\frac{MC_1}{\sin \angle MAC_1} = d$. Откуда находим $MC_1 = 4\sqrt{3}$ [11, 12].

б) Ответ: $4\sqrt{3}$.



а) Дано:

$AD \parallel BC$ (1),
$AD > BC$,
$ABCD$ вписана в окружность $\omega(O, R)$,
$BH \perp AD$ (2),
$K = BH \cap \omega$.

а) Доказать:

$\angle CAK = 90°$.

б) Дано:

$N = CK \cap AD$,
$R = 6$ (3),
$\angle BAC = 30°$ (4),
$S_{BCNH} = 35 S_{NKH}$ (5).

б) Найти:

$AD = ?$

а) Доказательство:

- $\angle AHB = 90°$ [2]. $\angle CBK = \angle AHB = 90°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC [1]. Следовательно, CK — диаметр (6).
- $\angle CAK = 90°$, так как он вписанный и опирается на диаметр CK [6], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle CBK = \angle NHK$ как соответственные углы при параллельных прямых AD и BC [1]. Следовательно, $\triangle BCK \sim HNK$, так как $\angle BKC$ у них общий. Коэффициент подобия этих треугольников равен $k = \sqrt{\frac{S_{BCK}}{S_{NHK}}} = \sqrt{\frac{S_{BCHN}+S_{NHK}}{S_{NHK}}} = 6$ [5]. То есть $\frac{CK}{NK} = \frac{BK}{HK} = 6$ (7).
- $CK = 2R = 12$ [3, 6]. Находим, что $NK = \frac{CK}{6} = 2$ (8) [7] и $CN = CK - NK = 10$ (9).
- $\angle BKC = \angle BAC = 30°$, так как они вписанные и опираются на одну дугу BC [4]. В $\triangle HNK$ прямоугольный с углом в $K = 30°$. Следовательно, $NH = \frac{1}{2}NK = 1$ (10) [8].
- По теореме Пифагора для $\triangle HNK$ имеем $HK = \sqrt{NK^2 - NH^2}$. Отсюда находим $HK = \sqrt{3}$ (11) [8, 10]. Далее $BK = 6HK = 6\sqrt{3}$ [7]. Получаем, что $BH = BK - HK = 5\sqrt{3}$ (12).
- Обозначим $AH = x$, $DN = y$. По свойству пересекающихся хорд имеем $AH \cdot DH = BH \cdot HK$ и $AN \cdot ND = NK \cdot CN$. Получаем следующую систему уравнений: $x(1+y) = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ и $(x+1)y = 2 \cdot 10$ [8, 9, 11, 12]. Решив эту систему, находим $x = 2\sqrt{6} - 3$ (13) и $y = 2\sqrt{6} + 2$ (14).
- $AD = AH + HN + DN = 4\sqrt{6}$ [10, 13, 14].

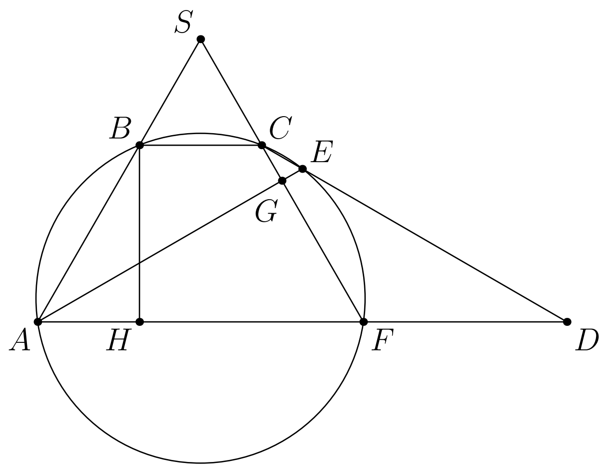
б) Ответ: $4\sqrt{6}$.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$\triangle ABC$ вписан в окружность ω (2),
$E = CD \cap \omega$,
$F = AD \cap \omega$,
$AB = FD$ (3).

а) Доказать:
$\angle EAD = \angle EDA$.

б) Дано:
$AB = 5$ (4),
$BC = 3$ (5),
$AE \perp CF$ (6).

б) Найти:
$S_{ABCD} = ?$



а) Доказательство:

- $ABCF$ — равнобедренная трапеция (7), так как она вписана в окружность ω [1, 2]. Откуда имеем $AB = CF$. Значит, $FD = CF$ [3]. Значит, $\triangle CFD$ равнобедренный с основанием CD. Откуда получаем, что $\angle DCF = \angle EDA$ (8).
- $\angle DCF = \angle EAD$, так как они вписанные и опираются на одну дугу EF. Получаем, что $\angle EAD = \angle EDA$ (9) [8], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $\angle EDA = \angle EAD = \alpha$ (10) [9]. Тогда $\angle CFA = 2\alpha$ (11) как внешний для $\triangle CFD$ [8]. Далее имеем $\angle BAD = \angle CFA = 2\alpha$ (12) [7]. Откуда $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAD = \alpha$ (13) [9].
- Пусть $G = AE \cap CF$ и $S = AB \cap FC$. Тогда по сумме углов $\triangle AGF$ находим $\alpha = 30^\circ$ [10, 11]. Получаем, $\angle CFA = \angle BAD = 60^\circ$ [12, 13]. Таким образом, $\triangle ASF$ равносторонний (14).
- $\angle SBC = \angle SAF = 60^\circ$ как соответственные при параллельных прямых AD и BC [1, 14]. Аналогично $\angle SCB = \angle SFA = 60^\circ$. Следовательно, $\triangle BSC$ также равносторонний. Откуда $BS = BC = 3$. Далее получаем $AF = AS = AB + BS = 8$ [4, 14] и $AD = AF + FD = 13$ (15) [3].
- Пусть BH — высота трапеции $ABCD$. Тогда имеем $BH = AB \cdot \sin\angle BAD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ [4, 14]. Окончательно получаем $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = 20\sqrt{3}$ [5, 15].

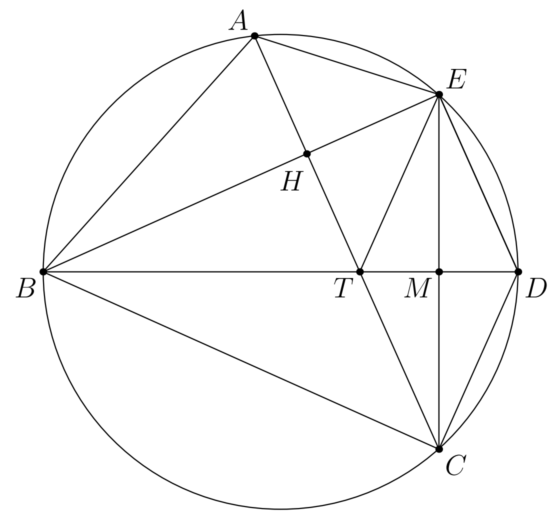
б) Ответ: $20\sqrt{3}$.

а) Дано:
$ABCDE$ вписан в окружность ω,
$AE = ED = CD$ (1),
$AC \perp BE$ (2),
$T = AC \cap BD$,
$M = EC \cap BD$.

а) Доказать:
$DM = TM$.

б) Дано:
$BD = 6$ (3),
$AE = \sqrt{6}$ (4).

б) Найти:
$S_{ABT} = ?$



а) Доказательство:

- $\angle DEC = \angle ACE$ (5) как вписанные, опирающиеся на равные хорды [1]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых AC и DE. Значит, $AC \parallel DE$ (6).
- $\angle BED = \angle BHT = 90^\circ$ как соответственные углы при параллельных прямых [2, 6]. Следовательно, BD — диаметр ω (7), так как на него опирается прямой $\angle BED$.
- Обозначим $\angle ACE = \alpha$. Тогда $\angle DBE = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды [1]. Пусть $H = AC \cap BE$. По сумме углов $\triangle BHT$ имеем $\angle HTB = 90^\circ - \alpha$ [2]. Далее $\angle CTM = \angle HTB = 90^\circ - \alpha$ как вертикальные. По сумме углов $\triangle CMT$ получаем, что $\angle CMT = 90^\circ$. Откуда $CE \perp BD$ (8).
- Хорда CE перпендикулярна диаметру BD [8]. Значит, $CM = EM$. Откуда $\triangle TMC = \triangle DME$ по катету и углу [5, 8]. TC и DE равны и параллельны [6], а $\angle TME = 90^\circ$. Следовательно, $CDET$ — ромб (9), и $DM = TM$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle ABE = \angle DBE$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды [1]. То есть BH — биссектриса и высота $\triangle ABT$ [2], откуда $AH = TH$ (10). Значит, EH — медиана и высота $\triangle AET$ [2], то есть $TE = AE$. Откуда $DE = CT = TE = \sqrt{6}$ (11) [9].
- Из прямоугольного $\triangle BED$ находим $\sin\alpha = \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ [3, 4, 7]. $\angle CED = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды [1]. Из $\triangle MDE$ находим $MD = ED \cdot \sin\alpha = 1$. Отсюда $TD = 2MD = 2$ (12) [9] и $BT = BD - TD = 4$ (13).
- По свойству пересекающихся хорд имеем $AT \cdot CT = BT \cdot DT$. Отсюда находим $AT = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ (14) [11, 12, 13] и $HT = \frac{AT}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (15) [9].
- По теореме Пифагора для $\triangle BHT$ имеем $BH = \sqrt{BT^2 - HT^2} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$ [13, 15]. Откуда $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AT = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ [14].

б) Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

а) Дано:

$AD \parallel BC$ (1),
$BC < AD$,
$AB = BC = CD$ (2),
$BE \perp AD$ (3),
$CE \perp BD$ (4).

а) Доказать:

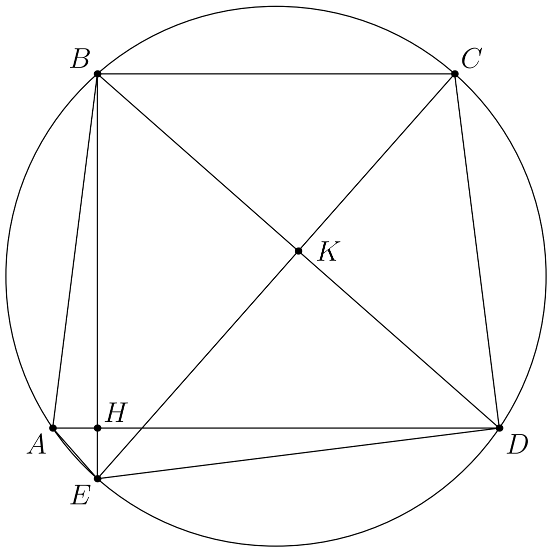
$\angle AEB = \angle ADB$.

б) Дано:

$AB = 32$ (5),
$\cos\angle AEB = \frac{3}{4}$ (6).

б) Найти:

$S_{ABCD} = ?$



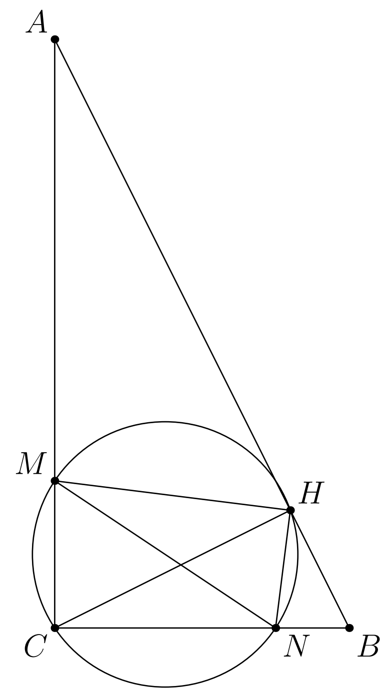
а) Доказательство:

- $ABCD$ — равнобедренная трапеция [1, 2], опишем вокруг нее окружность ω. Пусть $K = CE \cap BD$. Имеем равнобедренный $\triangle BCD$ с высотой CK [2, 4]. Следовательно, $BK = DK$ (7).
- $\triangle BEC$ — равнобедренный, так как в нем высота EK является медианой [4, 7]. Значит, $BE = DE$ (8). Отсюда получаем, что $\triangle CBE = \triangle CDE$ по трем сторонам [7, 8] и $\angle CBE = \angle CDE$ (9).
- $\angle CBE = \angle AHB = 90°$ (10) как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [1, 3]. Следовательно, $\angle CDE + \angle CBE = 180°$ [9], а значит, точка E лежит на окружности ω. Таким образом, $\angle AEB = \angle ADB$ (11) как вписанные, опирающиеся на одну дугу AB, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle CBK = \angle ADB$ как накрест лежащие при параллельных прямых [1]. Из прямоугольного $\triangle BCK$ находим $BK = BC \cdot \cos CBK = 24$ [4, 5, 6, 11]. Откуда $BD = 2BK = 48$ (12) [7].
- Из прямоугольного $\triangle BHD$ имеем $DH = BD \cdot \cos\angle ADB = 36$ (13) [6, 11, 12]. По основному тригонометрическому тождеству находим $\sin\angle ABD = \frac{\sqrt{7}}{4}$ [6] и $BH = BD \cdot \sin ADB = 12\sqrt{7}$ (14) [12].
- По теореме Пифагора для $\triangle ABH$ находим $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 4$. Откуда $AD = AH + DH = 40$ (15) [13].
- $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = 432\sqrt{7}$ [2, 5, 14, 15].

б) Ответ: $432\sqrt{7}$.



а) Дано:

$\angle ACB = 90^\circ$ (1),
CH — высота
$\triangle ABC$ (2),
$M \in AC$, $N \in BC$,
$\angle MHN = 90^\circ$ (3).

а) Доказать:

$\triangle MNH \sim \triangle ABC$.

б) Дано:

$BC = 2$ (4),
$AC = 4$ (5),
$CM = 1$ (6).

б) Найти:

$CN = ?$

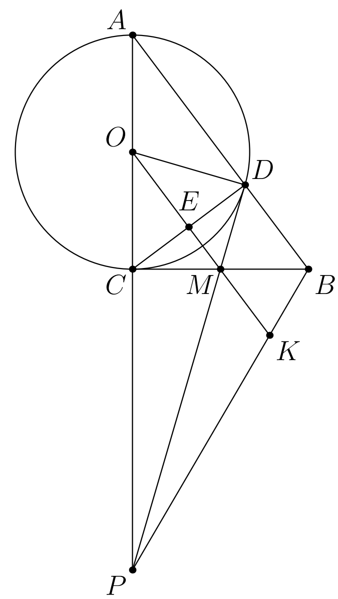
а) Доказательство:

- Так как $\angle ACB + \angle MHN = 180^\circ$ [1, 3], значит, $MCNH$ вписан в окружность ω (7).
- Обозначим $\angle ABC = \alpha$. По сумме углов прямоугольного $\triangle CHB$ находим $\angle HCB = 90^\circ - \alpha$ [2]. $\angle HMN = \angle HCB = 90^\circ - \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу NH [7]. По сумме углов прямоугольного $\triangle MHN$ находим $\angle MNH = \alpha$ (8). Следовательно, $\angle MNH = \angle ABC$. Откуда $\triangle MNH \sim \triangle ABC$ (9) по двум углам [1, 3], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ имеем $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$ (10). Так как CH — высота, проведенная из прямого угла, то $\triangle ABC \sim \triangle ACH$. Откуда $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CH} = \frac{BC}{CH}$. Решив эту систему, находим $CH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (11) [4, 5, 10].
- $\angle MCH = \angle MNH = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу MH. Из прямоугольного $\triangle ABC$ находим $\cos\alpha = \frac{BC}{AB}$. Откуда $\cos\angle MCH = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (12) [4, 10].
- По теореме косинусов для $\triangle MCH$ имеем $MH^2 = MC^2 + CH^2 - 2 \cdot MC \cdot CH \cdot \cos\angle MCH$. Откуда находим $MH = \frac{\sqrt{65}}{5}$ (13) [6, 11, 12].
- $\triangle MNH \sim \triangle ABC$ [9]. Откуда $\frac{MH}{AC} = \frac{MN}{AB}$. Из этого соотношения находим $MN = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (14) [5, 10, 13].
- По теореме Пифагора для $\triangle MCN$ получаем $CN = \sqrt{MN^2 - CM^2} = \frac{3}{2}$ [6, 14].

б) Ответ: $\frac{3}{2}$.



а) Дано:

$\angle ACB = 90^\circ$ (1),
AC — диаметр окружности $\omega(O)$ (2),
$D = AB \cap \omega$,
$M \in BC$,
DM — касательная к ω (3).

а) Доказать:

$BM = CM$.

б) Дано:

$P = DM \cap AC$,
$K = OM \cap BP$,
$\cos\angle BAC = \frac{4}{5}$ (4).

б) Найти:

$BK : KP = ?$

а) Доказательство:

- Обозначим $\angle BAC = \alpha$. $OA = OD = OC$ (5) как радиусы ω. Следовательно, $\triangle ADO$ — равнобедренный с основанием AD, и $\angle ADO = \angle BAC = \alpha$ (6).
- $\angle ADC = 90^\circ$ (7) как вписанный, опирающийся на диаметр AC [2]. Откуда $\angle ODC = \angle ADC - \angle ADO = 90^\circ - \alpha$ [6]. Далее видим, что $\triangle ODC$ равнобедренный с основанием CD [5]. То есть $\angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - \alpha$ (8).
- $\angle DCB = \angle ACB - \angle OCD = \alpha$ [1, 8]. DM — касательная, то есть $\angle ODM = 90^\circ$. Откуда $\angle CDM = \angle ODM - \angle ODC = \alpha$ [8]. Таким образом, $\angle CDM = \angle DCB = \alpha$ (9). Значит, $\triangle CDM$ равнобедренный с основанием CD, то есть $CM = DM$ (10).
- $\angle BDC = 90^\circ$ как смежный с прямым [7]. Откуда $\angle BDM = \angle BDC - \angle CDM = 90^\circ - \alpha$ [9]. По сумме углов прямоугольного $\triangle ABC$ находим $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ [1]. То есть $\angle BDM = \angle ABC$, $\triangle BDM$ равнобедренный с основанием BD, и $DM = BM$. $CM = DM = BM$ (11) [10], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По основному тригонометрическому тождеству находим $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{5}$ [4]. Далее $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$ (12). Обозначим $AC = 4x$ (13), тогда $BC = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3x$. Отсюда $CM = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}x$ (14) [11].
- $\angle PMC = \angle CDM + \angle DCB = 2\alpha$ как внешний для $\triangle CDM$ [9]. Имеем $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Откуда $\operatorname{tg}\angle PMC = \frac{24}{7}$ [12]. Находим $PC = CM \cdot \operatorname{tg}\angle PMC = \frac{36}{7}x$ (15) [14].
- Имеем $OA = OC = 2x$ как радиусы [13]. Следовательно, $OK \parallel AB$ как средняя линия $\triangle ABC$ [11]. По теореме Фалеса имеем $BK : KP = AO : OP = 2x : (2x + \frac{36}{7}x) = \frac{7}{25}$ [15].

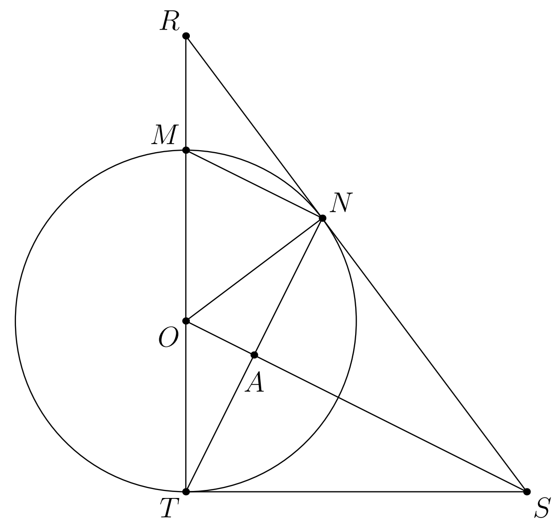
б) Ответ: $\frac{7}{25}$.

а) Дано:
$\angle RTS = 90^\circ$ (1),
$M \in RT$,
TM — диаметр окружности $\omega(O)$ (2),
RS касается ω в точке N (3).

а) Доказать:
$MN \parallel SO$.

б) Дано:
$TN = 8$ (4),
$RM : MT = 1 : 3$ (5).

б) Найти:
$S_{SOMN} = ?$



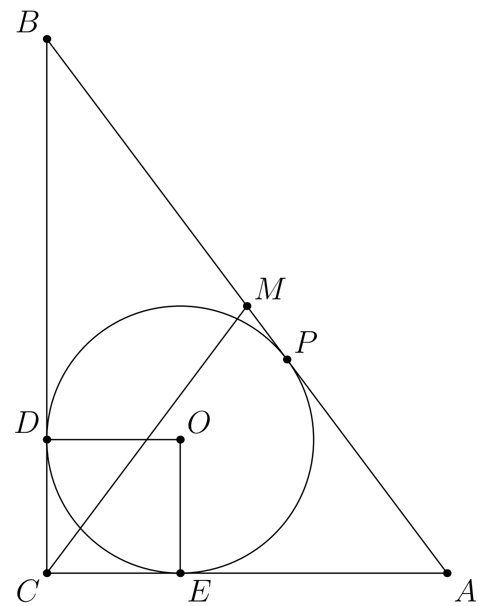
а) Доказательство:

- $OM = ON = OT$ (6) как радиусы ω. $\angle SNO = 90^\circ$, так как N — точка касания ω [3]. Тогда $\triangle ONS = \triangle OTS$ как прямоугольные с равными катетами и общей гипотенузой [1]. Отсюда получаем $\angle NOS = \angle TOS$ (7) и $ST = SN$ (8).
- Пусть $A = TN \cap OS$. Тогда OA — биссектриса в равнобедренном $\triangle NOT$ [6, 7]. Откуда $TA = NA$ (9), и $\angle OAT = 90^\circ$ (10). Получаем, что OA — средняя линия в $\triangle MNT$. Следовательно, $MN = 2OA$ (11), и $MN \parallel SO$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $OT = 3x$. Тогда $TM = 6x$ (12) [6], и $OR = 5x$ (13) [5, 6]. Далее $\angle RNO = 90^\circ$ [3]. По теореме Пифагора для $\triangle RNO$ имеем $RN = \sqrt{OR^2 - ON^2} = 4x$ (14) [6, 13].
- По теореме Пифагора для $\triangle RTS$ имеем $RT^2 + ST^2 = (SN + RN)^2$. Откуда находим $ST = SN = 6x$ (15) [8, 14]. По теореме Пифагора для $\triangle TOS$ имеем $OS = \sqrt{OT^2 + TS^2}$. Откуда $OS = 3\sqrt{5}x$ (16).
- $TA = NA = \frac{1}{2}TN = 4$ (17) [4]. TA — высота $\triangle OTS$, проведенная к гипотенузе [1, 10]. Откуда $\triangle OTA \sim \triangle OST$, то есть $\frac{OT}{OS} = \frac{OA}{OT} = \frac{TA}{ST}$. Решив эту систему, находим $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (18) и $OA = 2$ [15]. Также находим $MN = 2OA = 4$ (19) [11].
- $OS = 10$ [16, 18]. $S_{SOMN} = \frac{MN+OS}{2} \cdot NA = 28$ [17, 19].

б) Ответ: 28.



а) Дано:
Окружность $\omega(O, r)$ вписана в $\triangle ABC$ (1),
$P = AB \cap \omega$,
$AM = BM$ (2).

а) Доказать:
$MP = \frac{|BC-AC|}{2}$.

б) Дано:
$MP = \frac{r}{2}$ (3),
$BC > AC$ (4),
$AM = CM$ (5).

б) Найти:
$\angle ABC = ?$

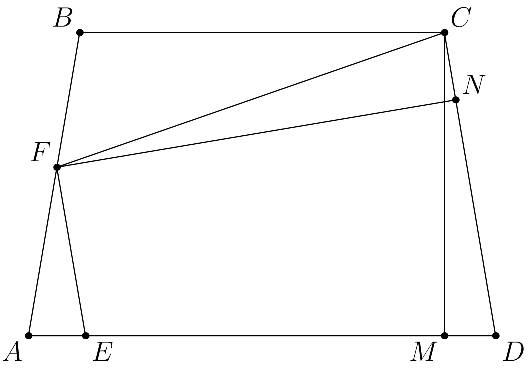
а) Доказательство:

- Пусть $D = BC \cap \omega$ и $E = AC \cap \omega$. Воспользовавшись свойством касательных, проведенных из одной точки, введем обозначения $AE = AP = a$ (6), $BP = BD = b$ (7) и $CD = CE = c$ (8) [1].
- Имеем $BM = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$ [2, 6, 7]. Рассмотрим случай $b > a$. Получаем $MP = AB - BM - AP = a + b - \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$. Прибавим и вычтем c. Будем иметь $MP = \frac{b+c-a-c}{2} = \frac{BC-AC}{2}$. Случай $b < a$ рассматривается аналогично. Получаем, $MP = \frac{|BC-AC|}{2}$ (9), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $AM = BM = CM$ [2, 5], следовательно, M — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности с диаметром AB. $\angle ACB = 90°$ (10) как вписанный, опирающийся на диаметр AB.
- $\angle ODC = \angle OEC = 90°$, так как точки D и E являются точками касания ω [1]. Следовательно, $CDOE$ — прямоугольник [10]. $OD = OE = r$ как радиусы ω. Откуда $CDOE$ — квадрат со стороной r, то есть $c = r$ (11) [8].
- Имеем, $\frac{r}{2} = MP = \frac{BC-AC}{2} = \frac{b-a}{2}$ [3, 4, 6, 7, 8, 9]. Следовательно, $b = a + r$ (12).
- По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ имеем $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то есть $(a+r)^2 + (b+r)^2 = (a+b)^2$ [6, 7, 8, 11]. Откуда $(a+r)^2 + (a+2r)^2 = (2a+r)^2$ [12]. Решив это уравнение относительно a, находим $a = 2r$ (13). Откуда $b = 3r$ (14) [12].
- $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{a+r}{b+r} = \frac{3}{4}$ [11, 13, 14]. Значит, $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

б) Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.



а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$AB = CD$ (2),
$F \in AB$, $E \in AD$,
$FE \parallel CD$ (3),
$FC = ED$ (4).

а) Доказать:
$\angle BCF = \angle AFE$.

б) Дано:
$ED = 3BF$ (5),
$FE = 5$ (6),
$S_{FCDE} = 14\sqrt{35}$ (7).

б) Найти:
$S_{ABCD} = ?$

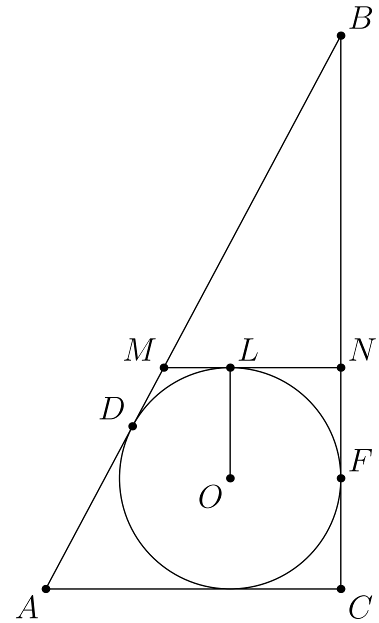
а) Доказательство:

- Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, откуда $\angle ADC = \angle BAD = \alpha$ [1, 2]. Трапеция $FCDE$ равнобедренная, значит, $\angle DCF = \angle ADC = \alpha$ (8). $\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$ как внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC [1]. Тогда $\angle BCD = 180^\circ - \angle ADC - \angle DCF$. Находим, что $\angle BCF = 180^\circ - 2\alpha$ (9).
- $\angle AEF = \angle ADC = \alpha$ как соответственные при параллельных прямых FE и CD [3]. Заметим, что $\triangle AFE$ равнобедренный, и $AF = FE$ (10). По сумме углов треугольника $\triangle AFE$ находим $\angle AFE = 180^\circ - 2\alpha$. Таким образом, $\angle BCF = \angle AFE = 180^\circ - 2\alpha$ [9], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ как внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC [1]. Откуда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ (11). Обозначим $BF = x$. Тогда $FC = ED = 3x$ (12) [4, 5].
- По теореме синусов для $\triangle BFC$ имеем $\frac{BF}{\sin\angle BCF} = \frac{BF}{\sin\angle ABC}$. То есть $\frac{x}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{3x}{\sin(180^\circ - \alpha)}$. Из этого уравнения находим $\cos\alpha = \frac{1}{6}$ (13) [11, 12]. Откуда по основному тригонометрическому тождеству $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$ (14).
- По теореме синусов для $\triangle AFE$ имеем $\frac{FE}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$ [8, 9]. Из этого уравнения находим $AE = \frac{5}{3}$ (15) [6 ,13].
- Пусть FN — высота трапеции $FCDE$. Из прямоугольного $\triangle FCN$ имеем $FN = FC \cdot \sin\alpha$ [8], то есть $FN = \frac{\sqrt{35}}{2}x$ [12, 14]. $CD = AB = AF + BF = 5 + x$ [2, 6, 10]. Имеем $S_{FCDE} = \frac{FE+CD}{2} \cdot FN$. То есть $14\sqrt{35} = \frac{5+5+x}{2} \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}x$ [6, 7]. Решив это уравнение, находим $x = 4$. Значит, $CD = 9$ (16), $ED = 12$ и $AD = AE + ED = \frac{41}{3}$ (17).
- Пусть CM — высота трапеции $ABCD$. Из прямоугольного $\triangle MDC$ имеем $CM = CD \cdot \sin\alpha = \frac{3\sqrt{35}}{2}$ (18) [14, 16]. Аналогично получаем $MD = CD \cdot \cos\alpha = \frac{3}{2}$. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $BC = AD - 2MD = \frac{32}{3}$ (19) [17].
- $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CM = \frac{73\sqrt{35}}{4}$ [17, 18, 18].

б) Ответ: $\frac{73\sqrt{35}}{4}$.



а) Дано:
$M \in AB$, $N \in BC$,
$AM : MB = 2 : 3$ (1),
$CN : NB = 2 : 3$ (2),
Окружность $\omega(O, r)$ вписана в $\triangle ABC$ (3),
$L \in MN$,
L точка касания ω (4).

а) Доказать:
$AB + BC = 4AC$.

б) Дано:
$LM = \frac{9}{5}$ (5),
$LN = 3$ (6).

б) Найти:
$r = ?$

а) Доказательство:

- $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и общему углу между ними [1, 2]. Откуда $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{AC}$. Находим, что $MN = \frac{3}{5}AC$ (7) [1]. Из условия также получаем $AM = \frac{2}{5}AB$ (8) и $CN = \frac{2}{5}BC$ (9) [1, 2].
- Четырехугольник $AMNC$ описан около окружности ω [3, 4]. Следовательно, $AC + MN = AM + CN$. Откуда $AC + \frac{3}{5}AC = \frac{2}{5}AB + \frac{2}{5}BC$ [7, 8, 9]. Приводя подобные слагаемые, получаем, $4AC = AB + BC$ (10), что и требовалось доказать.

б) Решение:

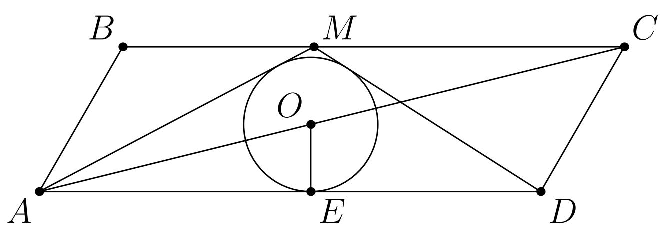
- Пусть $D = AB \cap \omega$ и $F = BC \cap \omega$. Обозначим $BM = 3x$ и $BN = 3y$. По свойству касательных, проведенных из одной точки, имеем $DB = FB$, $DM = LM$ и $FN = LN$. Откуда $BM + LM = BN + LN$, то есть $3x + \frac{9}{5} = 3y + 3$ [5, 6]. Упрощая, получим $x - y = \frac{2}{5}$ (11).
- Имеем $AB = 5x$, $BC = 5y$ [1, 2]. Откуда $AC = \frac{AB+BC}{4} = \frac{5}{4}(x + y)$ [10]. С другой стороны $AC = \frac{5}{3}MN = \frac{5}{3}(LM + LN)$. Значит, $AC = 8$ (12) [5, 6, 7]. Подставляем значение AC и получаем уравнение $x + y = \frac{32}{5}$ (13).
- Решая полученную систему [11, 13], находим $x = \frac{17}{5}$ и $y = 3$. То есть $AB = 17$ (14) и $BC = 15$ (15).
- Заметим, что $AC^2 + BC^2 = AB^2$ [12, 14, 15]. Откуда по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что $\triangle ABC$ — прямоугольный с гипотенузой AB. Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$. Таким образом, $S_{ABC} = 60$ (16).
- Половина периметра $\triangle ABC$ $p = \frac{AB+AC+BC}{2} = 20$ [12, 14, 15]. Следовательно, $r = \frac{S_{ABC}}{p} = 3$ [16].

б) Ответ: 3.

а) Дано:
$AB \parallel CD$ (1),
$AD \parallel BC$ (2),
$M \in BC$,
$AM = MC$ (3),
окружность $\omega(O, r)$ вписана в $\triangle AMD$ (4).

б) Дано:
$AB = 7$ (5),
$BC = 21$ (6),
$\angle DAB = 60^\circ$ (7).

б) Найти:
$r = ?$



а) Доказать:
$O \in AC$.

а) Доказательство:

- $\angle DAC = \angle BCA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [2]. $\triangle AMC$ равнобедренный с основанием AC [3]. То есть $\angle BCA = \angle MAC$. Таким образом, $\angle MAC = \angle DAC$ (8). Откуда AC — биссектриса $\angle MAD$. Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения его биссектрис. Значит, $O \in AC$ [4], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $AM = x$ (9) и $\angle DAM = \alpha$ (10). Тогда $BM = BC - MC = 21 - x$ (11) [3, 6]. $\angle ABC = 180^\circ - \angle DAB$ как внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC. Откуда $\angle ABM = 120^\circ$ (12) [7]. $\angle BMA = \angle DAM = \alpha$ (13) как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [1]. $\angle BAM = \angle DAB - \angle DAM$, то есть$\angle BAM = 60^\circ - \alpha$ (14).

- По теореме синусов для $\triangle ABM$ имеем $\frac{AB}{\sin BMA} = \frac{BM}{\sin BAM} = \frac{AM}{\sin ABM}$, то есть $\frac{7}{\sin\alpha} = \frac{21-x}{\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{x}{\sin 120^\circ}$ [5, 9, 10, 11, 12, 13]. Решив эту систему методом дополнительного угла, находим $x = 13$ и $\sin\alpha = \frac{7\sqrt{3}}{26}$. Значит, $AM = MC = 13$ (15), и $\sin\angle DAM = \frac{7\sqrt{3}}{26}$ (16).

- $\angle MCD = \angle DAB = 60^\circ$ как противоположные углы параллелограмма $ABCD$ [1, 2]. Так же получаем, что $CD = AB = 7$ [5]. По теореме косинусов для $\triangle CDM$ имеем $MD^2 = MC^2 + CD^2 - 2 \cdot MC \cdot CD \cos\angle MCD$. Откуда находим $MD = \sqrt{127}$ (17) [15].

- $S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AD \cdot \sin\angle DAM$. Находим $S_{AMD} = \frac{147\sqrt{3}}{4}$ (18) [6, 15, 16].

- Полупериметр $\triangle AMD$ $p = \frac{AM+MD+AD}{2} = \frac{34+\sqrt{127}}{2}$ [6, 15, 17]. В итоге находим $r = \frac{S_{AMD}}{p} = \frac{\sqrt{3}(34-\sqrt{127})}{14}$ [18].

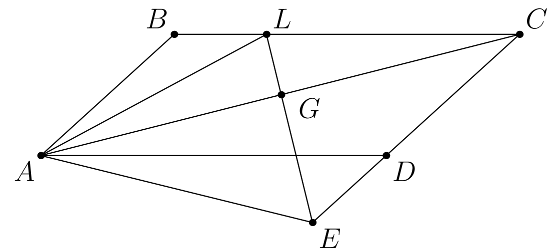
б) Ответ: $\frac{\sqrt{3}(34-\sqrt{127})}{14}$.

а) Дано:
$AB \parallel CD$ (1),
$AD \parallel BC$ (2),
$\angle BAC = 2\angle CAD$ (3),
$L \in BC$,
AL — биссектриса
$\angle BAC$ (4),
$D \in CE$,
$AE = CE$ (5).

а) Доказать:
$AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Дано:
$AC = 12$ (6),
$\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{4}$ (7).

б) Найти:
$EL = ?$



а) Доказательство:

- Обозначим $\angle BCA = \alpha$. Тогда $\angle CAD = \angle BCA = \alpha$ (8) как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [2]. Далее по условию имеем $\angle BAC = 2\angle CAD = 2\alpha$ [3]. Так как AL — биссектриса, то $\angle BAL = \angle CAL = \alpha$ (9) [4]. $\angle ACD = \angle BAC = 2\alpha$ (10) как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD. $\angle ALB = \angle LAD = 2\alpha$ (11) как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC.

- Имеем $\angle BAL = \angle BCA = \alpha$ [8, 9] и $\angle ALB = \angle BAC = 2\alpha$ [10, 11]. Отсюда $\triangle ABL \sim \triangle CBA$ по двум углам. Значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{AC}$. То есть $AL \cdot BC = AB \cdot AC$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть $G = AC \cap EL$. Так как $\angle CAL = \angle BCA$ [8, 9], то $\triangle ALC$ равнобедренный с основанием AC. Откуда $AL = CL$ (12). Следовательно, $\triangle ALE = \triangle CLE$ по трем сторонам [5]. То есть $\angle ALE = \angle CLE$. Значит, LG — биссектриса равнобедренного $\triangle ALC$, $AG = CG$ (13) и $\angle CGL = 90°$ (14).

- Находим $CG = \frac{1}{2}AC = 6$ (15) [6, 13]. Из прямоугольного $\triangle CGL$ имеем $LG = CG \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ (16) [7, 14].

- Из прямоугольного $\triangle CGE$ имеем $EG = CG \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$ (17) [7, 14]. Находим $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8}{15}$ [7]. Откуда $EG = \frac{16}{5}$ (18).

- $EL = LG + EG = \frac{47}{10}$. [16, 18].

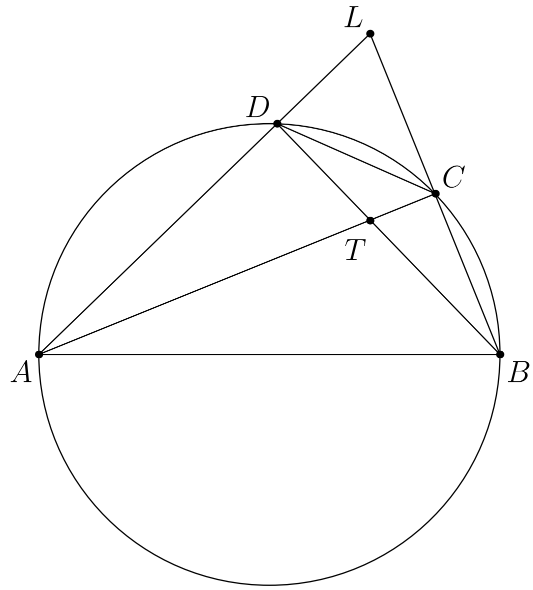
б) Ответ: $\frac{47}{10}$.

а) Дано:
$\angle ABL$ острый,
AC — биссектриса $\angle ABL$ (1),
$BC \perp AC$ (2),
$D \in AL$,
$BD \perp AD$ (3).

а) Доказать:
$AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Дано:
$T = AC \cap BD$,
$\cos\angle ABC = \frac{3}{8}$ (4).

б) Найти:
$AT : TC = ?$



а) Доказательство:

- $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ [2, 3]. Следовательно, $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB. $\angle BAC = \angle DAC$ (5), так как AC — биссектриса [1], и при этом они вписаны в окружность. Значит, $BC = CD$, так как равные вписанные углы опираются на равные хорды.

- По теореме Пифагора для $\triangle ABD$ имеем $AB^2 = AD^2 + DB^2$. По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ имеем $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Приравняем правые части этих равенств и с учетом [5] получим $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $AB = 8x$ (6). Тогда $BC = AB \cdot \cos\angle ABC$. Находим $BC = 3x$ (7) [4]. По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ имеем $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$. Откуда $AC = \sqrt{55}x$ (8).

- $\angle DAC = \angle CBD$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу CD. Следовательно, $\angle BAC = \angle CBD$ [5]. Значит, $\triangle ABC \sim BTC$ по двум углам ($\angle C$ у них общий). То есть $\frac{AB}{BT} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{TC}$. Решив эту систему, находим $BT = \frac{24\sqrt{55}x}{55}$ и $TC = \frac{9\sqrt{55}x}{55}$ (9) [6, 7, 8].

- $AT = AC - TC$. Откуда $AT = \frac{46\sqrt{55}x}{55}$ [8, 9]. Окончательно находим $AT : TC = \frac{46}{9}$ [9, 10].

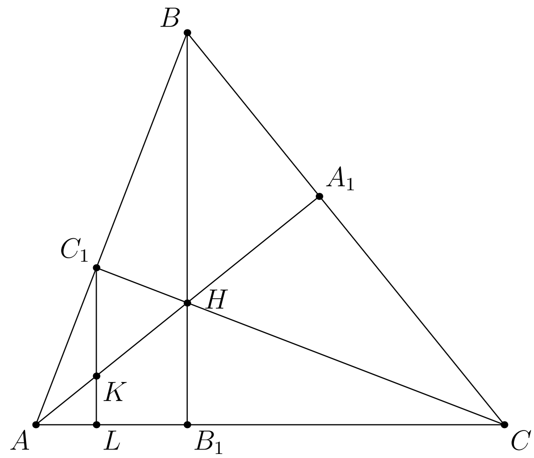
б) Ответ: $\frac{46}{9}$.

а) Дано:
$\triangle ABC$ — остроугольный,
AA_1, BB_1, CC_1 — высоты $\triangle ABC$ (1),
$H = AA_1 \cap BB_1$,
$K \in AA_1$,
$C_1K \parallel BB_1$ (2).

а) Доказать:
$AB \cdot HK = C_1H \cdot BC$.

б) Дано:
$AB = 5$ (3),
$BC = 6$ (4),
$AC = \sqrt{31}$ (5).

б) Найти:
$S_{ABC} : S_{C_1HK} = ?$



а) Доказательство:

- Обозначим $\angle KC_1H = \alpha$. $\angle BHC_1 = \angle KC_1H = \alpha$ как накрест лежащие при параллельных прямых C_1K и BB_1 [2]. По сумме углов прямоугольного $\triangle BC_1H$ находим $\angle C_1BH = 90° - \angle BHC_1 = 90° - \alpha$ [1]. По сумме углов прямоугольного $\triangle ABB_1$ находим $\angle BAC = 90° - \angle C_1BH = \alpha$. Таким образом, $\angle KC_1H = \angle BAC$ (6).

- Обозначим $\angle C_1KH = \beta$. $\angle AHB_1 = \angle C_1KH = \beta$ как накрест лежащие при параллельных прямых C_1K и BB_1 [2]. По сумме углов прямоугольного $\triangle AB_1H$ находим $\angle B_1AH = 90° - \angle AHB_1 = 90° - \beta$ [1]. По сумме углов прямоугольного $\triangle CAA_1$ находим $\angle ACB = 90° - \angle B_1AH = \beta$. Таким образом, $\angle C_1KH = \angle ACB$ (7).

- $\triangle ABC \sim \triangle C_1HK$ (8) по двум углам [6, 7]. Значит, $\frac{AB}{C_1H} = \frac{BC}{HK}$. То есть $AB \cdot HK = C_1H \cdot BC$, что и требовалось доказать.

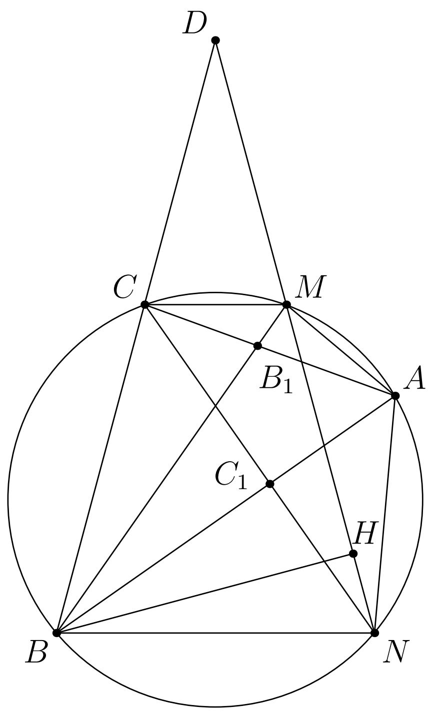
б) Решение:

- По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$. Откуда находим $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{31}}{31}$ (9) [3, 4, 5]. По основному тригонометрическому тождеству найдем $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, то есть $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{93}}{31}$ (10). Значит, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ (11).

- Из прямоугольного $\triangle ACC_1$ находим $CC_1 = AC \cdot \sin\alpha = 3\sqrt{3}$ [1, 5, 10]. По теореме Пифагора для $\triangle BCC_1$ имеем $BC_1 = \sqrt{BC^2 - CC_1^2} = 3$ [1, 4]. Из прямоугольного $\triangle BC_1H$ находим $C_1H = BC_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. То есть $C_1H = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (12) [11].

- Найдем коэффициент подобия $\triangle ABC$ и $\triangle C_1HK$: $k = \frac{AB}{C_1H} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ [3, 8, 12]. Тогда $S_{ABC} : S_{C_1HK} = k^2 = \frac{75}{4}$.

б) Ответ: $\frac{75}{4}$.



а) Дано:

BB_1 — биссектриса $\triangle ABC$ (1),
CC_1 — высота $\triangle ABC$ (2),
$\triangle ABC$ вписан в окружность ω (3),
$M = BB_1 \cap \omega$,
$N = CC_1 \cap \omega$,
$\angle BCA = 85^\circ$ (4),
$\angle ABC = 40^\circ$ (5).

а) Доказать:

$CN = BM$.

б) Дано:

$D = MN \cap BC$,
BH — высота $\triangle BDN$ (6),
$BH = 7$ (7).

б) Найти:

$S_{BDN} = ?$

а) Доказательство:

- Так как BB_1 биссектриса, имеем $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$ [1]. $\angle ACM = \angle CBM = 20^\circ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу CM [3]. $\angle BCM = \angle ACM + \angle BCA$. Находим $\angle BCM = 105^\circ$ (8) [4].

- По сумме углов прямоугольного $\triangle BHC$ получаем $\angle BCH = 90^\circ - \angle ABC = 50^\circ$ [2, 5]. Далее $\angle ACN = \angle BCA - \angle BCH = 35^\circ$ [4]. $\angle ABN = \angle ACN = 35^\circ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу AN. $\angle CBN = \angle ABC + \angle ABN$. Находим $\angle CBN = 75^\circ$ (9) [5].

- $BNMC$ вписан в окружность ω [3]. Следовательно, $\angle BNM + \angle BCM = 180^\circ$. Откуда $\angle BNM = 75^\circ$ [8]. Получаем, что $\angle BNM = \angle CBN = 75^\circ$ (10) [9]. Равные вписанные углы опираются на равные хорды, следовательно, $CN = BM$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По сумме углов $\triangle BDN$ имеем $\angle BDN = 180^\circ - \angle BNM - \angle CBN$. Откуда $\angle BDN = 30^\circ$ [10]. В прямоугольном $\triangle BHD$ имеем $BD = \frac{BH}{\sin \angle BDN}$. Находим $BD = 14$ (11) [7].

- $\triangle BDN$ равнобедренный с основанием BN [10]. Следовательно, $DN = BD = 14$ [11]. $S_{BDN} = \frac{1}{2} \cdot DN \cdot BH = 49$.

б) Ответ: 49.

а) Дано:

$ABCD$ — квадрат (1),
M — середина AB (2),
N — середина BC (3),
$K = CM \cap DN$.

а) Доказать:

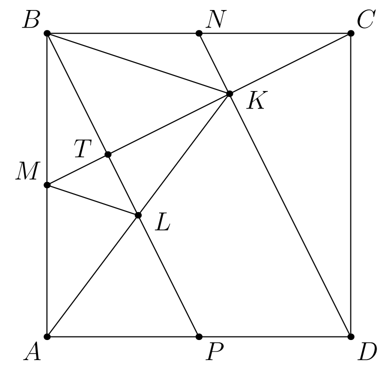
$\angle BKM = 45°$.

б) Дано:

$\triangle ABK$ вписан в окружность $\omega(R)$ (4),
$AB = 4\sqrt{5}$ (5).

б) Найти:

$R = ?$



а) Доказательство:

- $\triangle MBC = \triangle NCD$ по двум сторонам и углу между ними [1, 2, 3]. Откуда $\angle BMC = \angle CND$. $\angle BNK = 180° - \angle CND$ как смежные. Значит, $\angle BMK + \angle BNK = 180°$. Следовательно, $BNKM$ вписан в окружность (6).
- $BN = BM$ как половины сторон квадрата [1, 2, 3]. Значит, $\angle BKM = \angle BKN$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды BN и BM. Следовательно, $\angle BKM = \frac{1}{2}\angle NKM$. Но $\angle NKM = 180° - \angle ABC$ как противоположные углы вписанного четырехугольника [6]. Находим $\angle NKM = 90°$ (7) [1] и $\angle BKM = \angle BKN = 45°$ (8), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть P — середина отрезка AD (9). Тогда $BN = PD$ и $BN \parallel PD$, так как $ABCD$ — квадрат [1]. Следовательно, $BNDP$ — параллелограмм и $BP \parallel ND$ (10).
- Пусть $L = AK \cap BP$. Тогда LP — средняя линия $\triangle AKD$ [9, 10]. Значит, $AL = LK$. Но тогда ML — средняя линия $\triangle ABK$ [2]. Откуда $ML \parallel BK$ (11).
- $\angle LBK = \angle BKN = 45°$ [8] как накрест лежащие при параллельных прямых BP и ND [10]. Получаем, что $\angle LBK = \angle BKM$ [8]. Пусть $T = BL \cap MK$. Тогда $\triangle BTK$ равнобедренный с основанием BK. То есть $BT = KT$ (12).
- $\angle MLB = \angle LBK = 45°$ (13) как накрест лежащие при параллельных прямых ML и BK [11]. Аналогично $\angle LMK = \angle BKM = 45°$ [8]. Получаем, что $\angle LMK = \angle MLB$. Откуда $\triangle MTL$ равнобедренный с основанием ML. То есть $MT = LT$ (14).
- $\angle BTM = \angle KTL$ как вертикальные. Следовательно, $\triangle BMT = \triangle KLT$ по двум сторонам и углу между ними [12, 14]. Откуда $BM = KL$. То есть трапеция $BMLK$ равнобедренная [11]. Значит, $\angle MBK = \angle LKB$, и $\triangle ABK$ равнобедренный с основанием BK. То есть $AK = AB = 4\sqrt{5}$ (15) [5].
- По теореме Пифагора для $\triangle ABP$ находим $BP = \sqrt{AB^2 + AP^2} = 10$ [1, 5, 9]. Значит, $\sin\angle ABP = \frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\cos\angle ABP = \frac{AB}{BP} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Откуда $\sin\angle ABK = \sin(\angle ABP + \angle LBK) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ [13]. По теореме синусов для $\triangle ABK$ имеем $R = \frac{AK}{2\sin\angle ABK} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ [15].

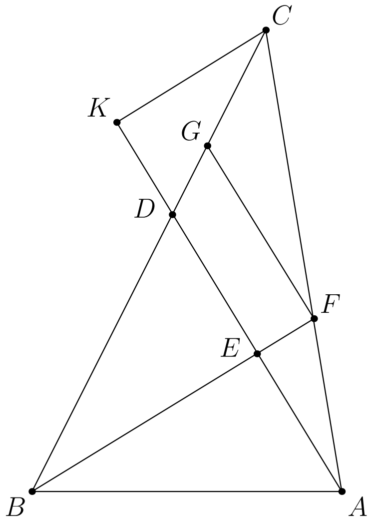
б) Ответ: $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

а) Дано:
$D \in BC$,
$AB = BD$ (1),
BF — биссектриса $\triangle ABC$ (2),
$E = BF \cap AD$,
CK — перпендикуляр к AD (3).

а) Доказать:
$AB : BC = AE : EK$.

б) Дано:
$BD : DC = 3 : 2$ (4).

б) Найти:
$S_{ABE} : S_{CDEF} = ?$



а) Доказательство:

- $\triangle ABD$ равнобедренный [1], BF его биссектриса, проведенная к основанию. Следовательно, $AE = DE$ (5), $\angle BED = 90^\circ$ (6) и $\triangle ABE = \triangle DBE$ (7).
- $\angle BED = \angle CKD = 90^\circ$ [3, 6]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых BF и CK. Откуда $BF \parallel CK$. Следовательно, $\angle CBE = \angle KCB$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Значит, $\triangle CKD \sim \triangle BED$ (8) по двум углам, обозначим их коэффициент подобия k.
- Обозначим $AB = x$. Тогда $BD = x$ [1] и $CD = kx$ [8]. $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD+CD} = \frac{1}{1+k}$. Аналогично обозначим $AE = y$. Тогда $DE = AE = y$ [5] и $KD = ky$ [8]. Находим $\frac{AE}{EK} = \frac{AE}{DE+KD} = \frac{1}{1+k}$. Таким образом, $AB : BC = AE : EK$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По свойству биссектрисы BF имеем $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}$. Находим $\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$ [1, 4].
- Проведем $FG \parallel DE$, $G \in BC$. По теореме Фалеса имеем $\frac{DG}{GC} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$. Откуда $BD : DG = 4 : 1$ [4]. Снова по теореме Фалеса имеем $\frac{BE}{EF} = \frac{BD}{DG} = \frac{4}{1}$. То есть $\frac{BE}{BF} = \frac{4}{5}$ (9).
- Обозначим $BE = 4t$, тогда $BF = 5t$ [9]. Обозначим $BD = 3z$, тогда $BC = 5z$ [4]. Находим $S_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BE \cdot \sin\angle CBF$. То есть $S_{DBE} = 6tz \sin\angle CBF$ (10). Аналогично $S_{GBF} = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot BF \cdot \sin\angle CBF$. То есть $S_{CBF} = \frac{25}{2} tz \sin\angle CBF$ (11).
- Находим $S_{CDEF} = S_{CBF} - S_{DBE} = \frac{13}{2} tz \sin\angle CBF$ [10, 11]. При этом $S_{ABE} = S_{DBE} = 6tz \sin\angle CBF$ [7, 10]. Откуда $S_{ABE} : S_{CDEF} = \frac{12}{13}$.

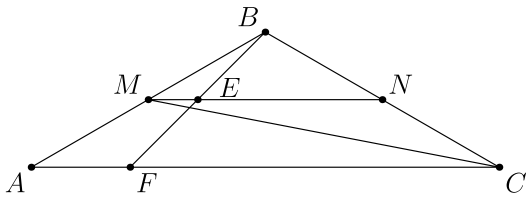
б) Ответ: $\frac{12}{13}$.

а) Дано:
M — середина AB (1),
N — середина BC (2),
$AMNC$ вписан в окружность $\omega(R)$ (3).

а) Доказать:
$\triangle ABC$ — равнобедренный.

б) Дано:
$F \in AC$,
$\angle AFB = 135^\circ$ (4),
$E = BF \cap MN$,
$\angle ABC = 120^\circ$ (5),
$EF = 6\sqrt{2}$ (6).

б) Найти:
$R = ?$



а) Доказательство:

- MN — средняя линия $\triangle ABC$ [1, 2]. Откуда $MN \parallel AC$ (7), то есть $AMNC$ — трапеция, вписанная в окружность ω [3]. Следовательно, $AMNC$ — равнобедренная трапеция. То есть $\angle BAC = \angle BCA$ (8). Значит, $AB = BC$ (9), и $\triangle ABC$ — равнобедренный, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По сумме углов $\triangle ABC$ имеем $\angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$ [8]. Находим $\angle BCA = \angle BAC = 30^\circ$ (10) [5].
- EN — средняя линия $\triangle CBF$ [2, 7]. Следовательно, $BF = 2EF = 12\sqrt{2}$ [6]. По теореме синусов для $\triangle AFB$ имеем $\frac{AB}{\sin \angle AFB} = \frac{BF}{\sin \angle BAC}$. Откуда $AB = 24$ (11) [4, 10, 11].
- По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$. Откуда находим $AC = 24\sqrt{3}$ (12) [5, 9, 11].
- $AM = \frac{1}{2}AB = 12$ [1, 11]. По теореме косинусов для $\triangle AMC$ получаем $MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2 \cdot AM \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$. Откуда $MC = 12\sqrt{7}$ (13) [10, 12].
- По теореме синусов для $\triangle AMC$ находим $R = \frac{MC}{2 \sin BAC} = 12\sqrt{7}$ [10, 13].

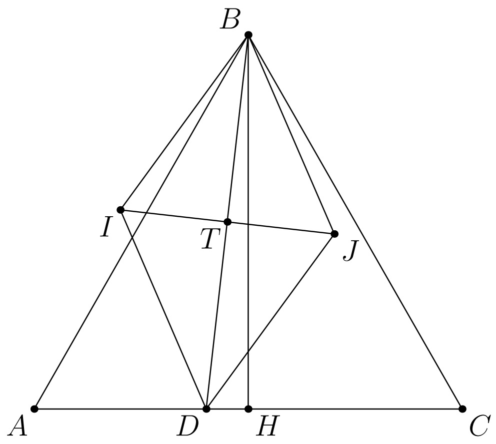
б) Ответ: $12\sqrt{7}$.

а) Дано:
$AB = BC$ (1),
$D \in AC$,
$\triangle ABD$ вписан в окружность $\omega_1(I, R_1)$ (2),
$\triangle CBD$ вписан в окружность $\omega_2(J, R_2)$ (3).

а) Доказать:
$BI \parallel DJ$.

б) Дано:
$AC = 16$ (4),
$\cos \angle BDC = \frac{1}{9}$ (5).

б) Найти:
$IJ = ?$



а) Доказательство:

- $\triangle ABC$ равнобедренный с основанием AC [1]. То есть $\angle BAC = \angle BCA$. По теореме синусов для $\triangle ABD$ имеем $R_1 = \frac{BD}{\sin \angle BAC}$ [2]. По теореме синусов для $\triangle CBD$ имеем $R_2 = \frac{BD}{\sin \angle BCA}$. Значит, $R_1 = R_2 = R$ (6).
- $IB = ID = R$ как радиусы ω_1 [2]. $JB = JD = R$ как радиусы ω_2 [3]. Следовательно, $IB = ID = JB = JD = R$ (7) [6]. Откуда $BIDJ$ — ромб (8), то есть $BI \parallel DJ$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть $BH = h$ — высота $\triangle ABC$. Обозначим $CH = a$. По теореме Пифагора для $\triangle BHC$ имеем $BC = \sqrt{h^2 + a^2}$ (9).
- Обозначим $\angle BDC = \alpha$. По теореме синусов для $\triangle BDC$ выражаем $R = \frac{BC}{2\sin\alpha}$. То есть $R = \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{2\sin\alpha}$ (10) [9].
- Из прямоугольного $\triangle BHD$ находим $BD = \frac{h}{\sin\alpha}$. Пусть $T = IJ \cap BD$. Диагонали ромба $BIDJ$ точкой T делятся пополам [8]. То есть $DT = \frac{BD}{2} = \frac{h}{2\sin\alpha}$ (11), и $IJ = 2TJ$ (12).
- $\angle DTJ = 90^\circ$ [8]. По теореме Пифагора для $\triangle DTJ$ имеем $TJ = \sqrt{JD^2 - DT^2}$. Откуда $TJ = \frac{a}{2\sin\alpha}$ [7, 10, 11]. Значит, $IJ = \frac{a}{\sin\alpha}$ (13) [12].
- $\triangle ABC$ равнобедренный, а значит, BH — медиана. То есть $a = CH = \frac{1}{2}AC = 8$ [4]. По основному тригонометрическому тождеству имеем $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. То есть $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ (14) [5]. Окончательно находим $IJ = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ [13].

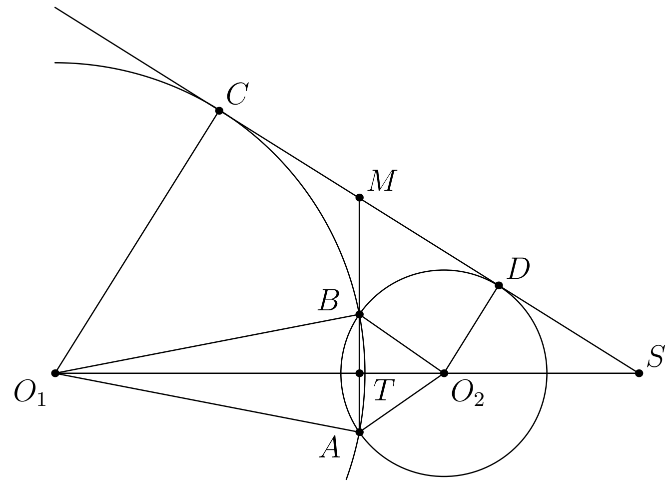
б) Ответ: $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

а) Дано:
$\omega_1(O_1, R_1)$,
$\omega_2(O_2, R_2)$ — окружности,
$A = \omega_1 \cap \omega_2$,
$B = \omega_1 \cap \omega_2$,
CD — общая касательная ω_1 и ω_2 (1),
$C \in \omega_1$, $D \in \omega_2$,
$M = CD \cap AB$,
$B \in AM$,
AO_1BO_2 — выпуклый.

а) Доказать:
$MC = MD$.

б) Дано:
$R_1 = 3$ (2),
$R_2 = 1$ (3),
$AB = MB$ (4).

б) Найти:
$O_1O_2 = ?$



а) Доказательство:

- К окружности ω_1 из точки M проведена касательная MC и секущая MA [1]. По теореме о касательной и секущей имеем $MC^2 = MB \cdot MA$. Аналогично для окружности ω_2 получаем $MD^2 = MB \cdot MA$. Таким образом, $MC = MD = \sqrt{MB \cdot MA}$ (5), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $O_1A = O_1B$ как радиусы ω_1. $O_2A = O_2B$ как радиусы ω_2. Откуда $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$ по трем сторонам, то есть $\angle O_2O_1A = \angle O_2O_1B$. Пусть $T = O_1O_2 \cap AB$. O_1O_2 — биссектриса равнобедренного $\triangle AO_1B$, проведенная к основанию AB. Следовательно, $AT = BT$ (6), и $\angle ATO_1 = 90^\circ$ (7).
- Обозначим $BT = x$ (8). Тогда $AT = x$ [6], $MB = AB = AT + BT = 2x$ (9) [4], и $MA = MB + BT + AT = 4x$. Далее находим $MC = MD = \sqrt{MB \cdot MA}$ [5]. То есть $MC = MD = 2\sqrt{2}x$, и $CD = 4\sqrt{2}x$ (10).
- По теореме Пифагора для $\triangle O_1TB$ имеем $O_1T = \sqrt{O_1B^2 - BT^2}$. Откуда находим $O_1T = \sqrt{9 - x^2}$ [1, 8]. По теореме Пифагора для $\triangle O_2TB$ имеем $O_2T = \sqrt{O_2B^2 - BT^2}$. Откуда выразим $O_2T = \sqrt{1 - x^2}$ [3, 8]. Находим $O_1O_2 = O_1T + O_2T$. Получаем $O_1O_2 = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{1 - x^2}$ (11).
- Пусть $S = CD \cap O_1O_2$. $\angle O_1CS = \angle O_2DS = 90^\circ$ (12) [1]. Тогда $\triangle O_1CS \sim \triangle O_2DS$ по двум углам. Откуда $\frac{CS}{DS} = \frac{O_1C}{O_2D}$. Учитывая $CS = CD + DS$, находим $DS = 2\sqrt{2}x$ (13) [2, 3, 10].
- По теореме Пифагора для $\triangle O_2DS$ имеем $O_2S = \sqrt{O_2D^2 + DS^2}$. Откуда $O_2S = \sqrt{1 + 8x^2}$ [3, 12]. $O_1C \parallel O_2C$ [12]. Следовательно, по теореме Фалеса получаем $\frac{CD}{DS} = \frac{O_1O_2}{O_2S}$. Откуда $O_1O_2 = 2\sqrt{1 + 8x^2}$ (14) [10, 13].
- Приравнивая [11] и [14], получаем уравнение $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{1 + 8x^2}$. Решив его, находим $x = \frac{\sqrt{46}}{12}$. Значит, $O_1O_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [14].

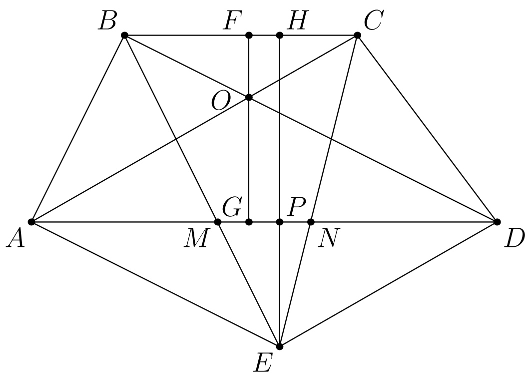
б) Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$O = AC \cap BD$,
$AD = 2BC$ (2),
$AE \parallel BD$ (3),
$AC \parallel DE$ (4).

а) Доказать:
$BO : AE = 1 : 2$.

б) Дано:
$M = BE \cap AD$,
$N = CE \cap AD$,
$AD = 10$ (5).

б) Найти:
$MN = ?$



а) Доказательство:

- $\angle EAD = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AE и BD [3]. $\angle OAD = \angle EDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и DE [4]. Значит, $\triangle AED = \triangle DOA$ по двум углам и общей стороне AD. Откуда $AE = DO$ (6). Пусть EP и OG высоты $\triangle AED$ и $\triangle DOA$ соответственно. Тогда $EP = OG$ (7).

- $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [1]. Аналогично $\angle ACB = \angle CAD$. Значит, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (8) по двум углам. Откуда $\frac{BO}{DO} = \frac{BC}{DA}$. Находим $\frac{BO}{DO} = \frac{1}{2}$ (9) [2]. Следовательно, $\frac{BO}{AE} = \frac{1}{2}$ [6], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть $F = OG \cap BC$. Тогда FO — высота $\triangle BOC$, так как $AD \parallel BC$ [1] и $OG \perp AD$. Высоты подобных треугольников относятся так же, как и их стороны. Откуда $\frac{FO}{OG} = \frac{BC}{AD}$ [8]. Обозначим $FO = x$. Тогда находим $OG = 2x$ [2], $EP = 2x$ (10) [7], и $FG = 3x$ (11).

- Пусть $H = EP \cap BC$. Тогда все углы $FHPG$ прямые, а значит, $FHPG$ — прямоугольник. То есть $HP = FG = 3x$ [11]. Откуда $EH = HP + EP = 5x$ (12) [10].

- Из условия найдем $BC = \frac{1}{2}AD = 5$ (13) [2, 5].

- $\angle CBE = \angle NME$ как соответственные при параллельных прямых AD и BC [1]. Аналогично $\angle BCE = \angle MNE$. Значит, $\triangle MNE \sim \triangle BCE$ (14) по двум углам. EP и EH высоты $\triangle MNE$ и $\triangle BCE$ соответственно. Откуда $\frac{MN}{BC} = \frac{EP}{EH}$. Из этого уравнения находим $MN = 2$ [10, 12, 13].

б) Ответ: 2.

а) Дано:

H — середина AB (1),
$D \in AC$,
$DH \perp AB$ (2),
$\omega(O)$ — окружность, вписанная в $\triangle ADB$ (3),
$P = AD \cap \omega$ (4),
$K = OP \cap AB$.

а) Доказать:

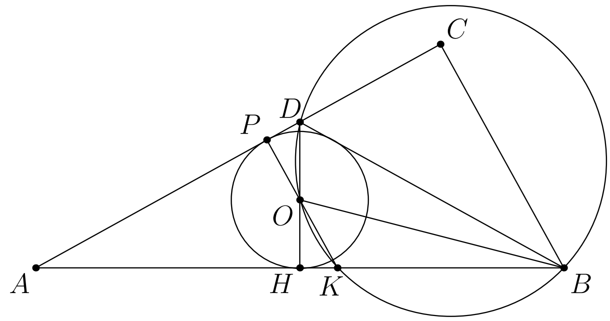
$BDOK$ вписан в окружность радиуса R.

б) Дано:

$AB = 8$ (5),
$BC = \sqrt{15}$ (6),
$AC = 7$ (7).

б) Найти:

$R = ?$



а) Доказательство:

- Обозначим $\angle OBH = \alpha$ (8). Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис, а значит, BO — биссектриса [3], и $\angle DBH = 2\alpha$. В $\triangle ABD$ DH является медианой и высотой, то есть $\triangle ABD$ равнобедренный, и $\angle DAH = \angle DBH = 2\alpha$ (9).

- По сумме углов прямоугольного $\triangle AHD$ находим $\angle ADH = 90^\circ - 2\alpha$ [2, 9]. Так как P — точка касания ω [3, 4], то $\angle OPD = 90^\circ$. По сумме углов прямоугольного $\triangle OPD$ находим $\angle DOP = 2\alpha$. $\angle DOK = 180^\circ - \angle DOP$ как смежные. Откуда $\angle DOK = 180^\circ - 2\alpha$ (10). $\angle DBH + \angle DOK = 180^\circ$ [9, 10]. Следовательно, $BDOK$ вписан в окружность, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\angle DAH$. Откуда находим $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$ (11) [5, 6, 7, 9]. Вычислим $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$. То есть $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (12).

- Найдем $BH = \frac{1}{2}AB = 4$ [1, 5]. Из прямоугольного $\triangle BOH$ имеем $OB = \frac{BH}{\cos\alpha}$. Откуда $OB = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ (13) [12].

- По сумме углов прямоугольного $\triangle DHB$ имеем $\angle BDH = 90^\circ - 2\alpha$. Откуда $\sin\angle BDH = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha$. То есть $\sin\angle BDH = \frac{7}{8}$ (14) [11].

- По теореме синусов для $\triangle BOD$ находим $R = \frac{OB}{2\sin\angle BDH} = \frac{64\sqrt{15}}{105}$ [13, 14].

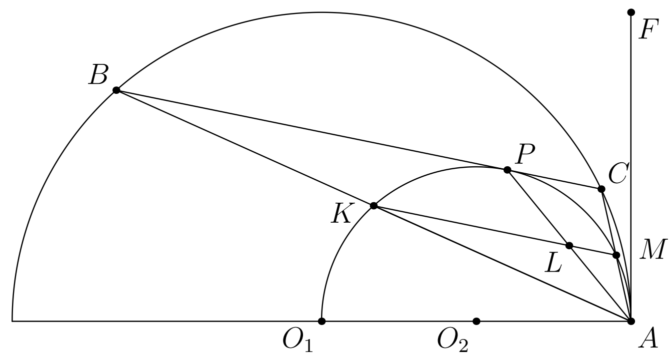
б) Ответ: $\frac{64\sqrt{15}}{105}$.

а) Дано:
FA касается окружностей $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ в точке A (1),
$O_2 \in AO_1$,
$R_1 > R_2$,
$O_1 \in \omega_2$ (2),
$B \in \omega_1, C \in \omega_1$,
BC — касается ω_2 в точке P (3),
$K = AB \cap \omega_2$,
$M = AC \cap \omega_2$.

а) Доказать:
$MK \parallel BC$.

б) Дано:
$L = KM \cap AP$,
$R_1 = 10$ (4),
$BC = 16$ (5).

б) Найти:
$AL = ?$



а) Доказательство:

- $\angle AKM$ вписанный, опирающийся на дугу AM. $\angle FAM$ — угол между касательной FA и хордой AM [1]. Следовательно, $\angle AKM = \angle FAM$. Аналогично $\angle ABC$ вписанный, опирающийся на дугу AC. $\angle FAM$ — угол между касательной FA и хордой AC. Следовательно, $\angle ABC = \angle FAM$. Получаем, что $\angle AKM = \angle ABC$ (6). Эти углы являются соответственными при прямых MK и BC. Значит, $MK \parallel BC$ (7), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $R_1 = 2R_2$ [1, 2]. $\triangle KAM \sim \triangle BAC$ по двум углам [6]. При этом $\triangle KAM$ вписан в окружность ω_2, а $\triangle BAC$ — в окружность ω_1. Стороны подобных треугольников относятся так же, как и радиусы описанных вокруг них окружностей. Откуда $\frac{BC}{MK} = \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AK} = \frac{R_1}{R_2} = 2$. То есть MK — средняя линия $\triangle ABC$. Отсюда $MK = 8$ (8) [5], $BK = AK$ (9), и $CM = AM$ (10).
- Обозначим $BK = AK = x$ и $CM = AM = y$ [9, 10]. Тогда $BA = 2x$, и $CA = 2y$. По теореме о касательной с секущей имеем $BP^2 = BK \cdot BA$ [3]. Отсюда $BP = \sqrt{2}x$ (11). Аналогично $CP^2 = CM \cdot CA$ [3], и $CP = \sqrt{2}y$ (12). Так как $BP + CP = BC$, то получаем уравнение $x + y = 8\sqrt{2}$ (13) [5].
- По теореме синусов для $\triangle ABC$ имеем $\sin\angle BAC = \frac{BC}{2R_1} = 0{,}8$ [4, 5]. По основному тригонометрическому тождеству получаем $\cos\angle BAC = \sqrt{1 - \sin^2\angle BAC}$. То есть $\cos\angle BAC = 0{,}6$ (14).
- По теореме косинусов для $\triangle AMK$ имеем $MK^2 = AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos\angle BAC$. Подставив введенные переменные и найденные величины, получаем уравнение $x^2 + y^2 - 1.2xy = 64$ (15) [14].
- KL — средняя линия $\triangle BAP$ [7, 8], $KL = \frac{1}{2}BP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ [11], и $AL = PL$. Аналогично $ML = \frac{\sqrt{2}}{2}y$ [12]. По свойству пересекающихся хорд имеем $AL \cdot PL = ML \cdot KL$. Откуда $AL = \sqrt{\frac{xy}{2}}$. Из системы [13, 15] находим $xy = 20$. То есть $AL = \sqrt{10}$.

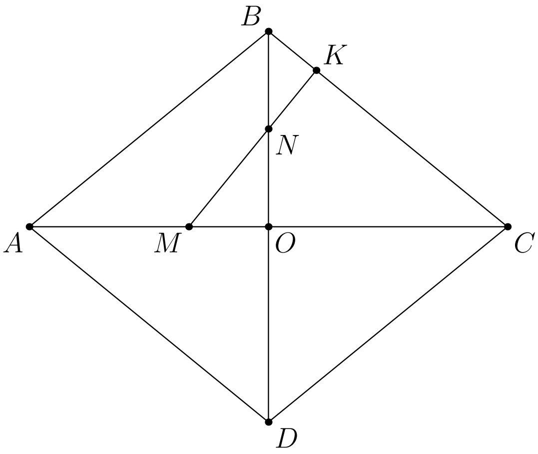
б) Ответ: $\sqrt{10}$.

а) Дано:
$ABCD$ — ромб (1),
$M \in AC$, $N \in BD$,
$AM : MC = 1 : 2$ (2),
$BN : ND = 1 : 3$ (3),
$MN \perp BC$ (4),
$K = MN \cap BC$.

а) Доказать:
$BK : KC = 1 : 4$.

б) Дано:
$MN = 3\sqrt{2}$ (5).

б) Найти:
$BC = ?$



а) Доказательство:

- Пусть $O = AC \cap BD$. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то есть $AO = CO$, и $BO = DO$. Обозначим $MO = x$ (6). Тогда $AM = 2x$ (7), и $CO = 3x$ (8) [2]. Обозначим $NO = y$ (9). Тогда $BN = y$ (10), и $DO = 2y$ (11) [3].
- $AC \perp BD$ (12) [1]. Обозначим $\angle OMN = \alpha$. По сумме углов прямоугольного $\triangle MON$ находим $\angle MNO = 90^\circ - \angle OMN = 90^\circ - \alpha$. $\angle BNK = \angle MNO = 90^\circ - \alpha$ (13) как вертикальные. По сумме углов прямоугольного $\triangle BNK$ находим $\angle KBN = 90^\circ - \angle BNK = \alpha$ [4]. Таким образом, $\angle OMN = \angle KBN$. Следовательно, $\triangle MON \sim \triangle BOC$ по двум углам [12]. То есть $\frac{MO}{BO} = \frac{NO}{CO}$. Выражаем отсюда $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x$ (14) [6, 8, 9, 10]
- По теореме Пифагора для $\triangle MON$ имеем $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2}$ [12]. Откуда $MN = \frac{\sqrt{10}}{2}x$ (15) [6, 9, 14]. По теореме Пифагора для $\triangle BOC$ имеем $BC = \sqrt{BO^2 + CO^2}$ [12]. Находим $BC = \sqrt{15}x$ (16) [8, 9, 10, 14].
- $\triangle MON \sim \triangle BKN$ по двум углам [12, 13]. Откуда $\frac{MO}{BK} = \frac{MN}{BN}$. Находим $BK = \frac{\sqrt{15}}{5}x$ [6, 10, 14, 15]. $KC = BC - BK = \frac{4\sqrt{15}}{5}$ [16]. Таким образом, $BK : KC = 1 : 4$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Из уравнения [15] находим $x = \frac{\sqrt{10}}{5}$ [5]. Тогда $BC = 6\sqrt{3}$ [16].

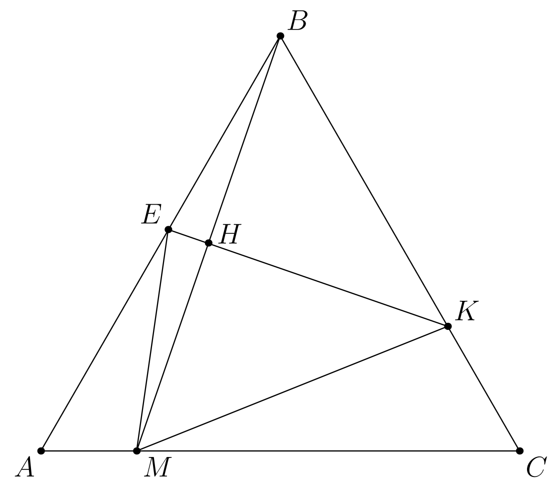
б) Ответ: $6\sqrt{3}$.

а) Дано:
$\triangle ABC$ — равносторонний (1),
$M \in AC$, $E \in AB$,
$K \in BC$,
$EK \perp BM$ (2),
$H = EK \cap BM$,
$BH = MH$ (3).

а) Доказать:
$\angle AEM = \angle CMK$.

б) Дано:
$AM : CM = 1 : 4$ (4).

б) Найти:
$S_{AEM} : S_{CMK} = ?$



а) Доказательство:

- EH — медиана и высота $\triangle MEB$ [2, 3]. Значит, $\triangle MEB$ — равнобедренный. То есть $BE = ME$. Аналогично KH — высота и медиана $\triangle MKB$ [2, 3]. Значит, $\triangle MKB$ — равнобедренный. То есть $BK = MK$ (5). Следовательно, $\triangle BEK = \triangle MEK$ (6) по трем сторонам.

- $\angle ABC = \angle BCA = \angle BAC = 60°$ (7) как углы равностороннего треугольника [1]. $\angle KME = \angle KBE = 60°$ [1, 6]. Обозначим $\angle KMC = \alpha$. Тогда $\angle AME = 180° - \angle KME - \angle KMC = 120° - \alpha$. По сумме углов $\triangle AEM$ находим $\angle AEM = 180° - \angle AME - \angle BAC = \alpha$ [1]. Таким образом, $\angle AEM = \angle CMK$ (8), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $AM = x$. Тогда $MC = 4x$ [4]. Обозначим $CK = y$. По теореме косинусов для $\triangle MKC$ имеем $MK^2 = MC^2 + CK^2 - 2 \cdot MK \cdot CK \cdot \cos\angle ACB$. Откуда выражаем $MK = \sqrt{16x^2 + y^2 - 4xy}$. Тогда $BC = BK + CK = MK + CK$ [6], то есть $BC = \sqrt{16x^2 + y^2 - 4xy} + y$ (9).

- Так как $\triangle ABC$ равносторонний [1], имеем $BC = AC = 5x$. Приравняем это выражение к [9] и получим уравнение $\sqrt{16x^2 + y^2 - 4xy} + y = 5x$. Разрешив его относительно y, найдем $y = \frac{3}{2}x$ (10).

- $\triangle AEM \sim \triangle CMK$ по двум углам [7, 8]. Следовательно, $S_{AEM} : S_{CMK} = \left(\frac{AM}{CK}\right)^2 = \frac{4}{9}$ [10].

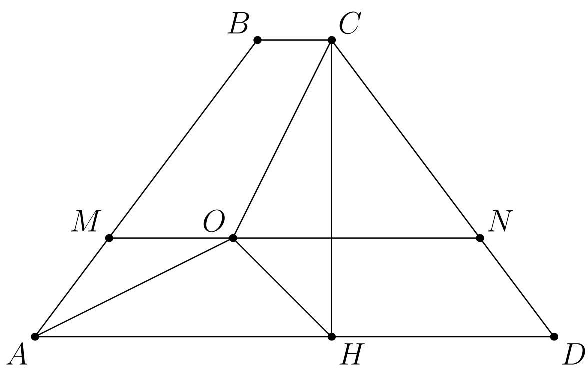
б) Ответ: $\frac{4}{9}$.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$AB = CD$ (2),
AO — биссектриса $\angle BAD$ (3),
CO — биссектриса $\angle BCD$ (4),
$M \in AB$, $N \in CD$,
$AM = MO$ (5),
$CN = NO$ (6).

а) Доказать:
M, N, O лежат на одной прямой.

б) Дано:
$AO = CO$ (7),
$BC : AD = 1 : 7$ (8).

б) Найти:
$AM : MB = ?$



а) Доказательство:

- $\triangle AMO$ равнобедренный с основанием AO [5]. Откуда $\angle MAO = \angle MOA$. При этом $\angle MAO = \angle DAO$ [2]. То есть $\angle MOA = \angle DAO$. Эти углы являются накрест лежащими при прямых AD и MO. Следовательно, $AD \parallel MO$. Аналогично получаем $BC \parallel NO$ [3, 6]. Через точку O, не лежащую на прямой AD, проходит ровно одна прямая, параллельная AD. Следовательно, точки M, O и N лежат на одной прямой, что и требовалось доказать. Отметим $MN \parallel AD$ (9).

б) Решение:

- Обозначим $BM = x$ и $AM = kx$. Так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция [1, 2] и $MN \parallel AD$ [9], то $CN = BM = x$ и $DN = AM = kx$. По условию имеем $MO = AM = kx$ (10) и $NO = CN = x$ (11).

- Обозначим $\angle MAO = \alpha$ (12). Тогда $\angle BAD = 2\alpha$ [3]. Так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция, то $\angle CDA = \angle BAD = 2\alpha$ (13). $\angle BCD = 180^\circ - \angle CDA$ как внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC [1]. То есть $\angle BCD = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle NCO = 90^\circ - \alpha$ (14) [4].

- По сумме углов равнобедренного $\triangle AMO$ находим $\angle AMO = 180^\circ - 2\alpha$ [12]. По теореме синусов для $\triangle AMO$ имеем $\frac{MO}{\sin\angle MAO} = \frac{AO}{\sin\angle AMO}$. Откуда $AO = 2kx\cos\alpha$ [10, 12]. По сумме углов равнобедренного $\triangle CNO$ находим $\angle CNO = 2\alpha$ [14]. По теореме синусов для $\triangle CNO$ имеем $\frac{NO}{\sin\angle NCO} = \frac{CO}{\sin\angle CNO}$. Откуда $CO = 2x\sin\alpha$ [11, 14]. Из условия [7] находим $k = \operatorname{tg}\alpha$ (15).

- Проведем трапеции $ABCD$ высоту CH. По сумме углов прямоугольного $\triangle CHD$ находим $\angle DCH = 90^\circ - 2\alpha$ [13]. Откуда $\angle HCO = \angle NCO - \angle DCH = \alpha$ [14]. Получаем, что $\angle OAD = \angle HCO = \alpha$ [3, 12]. Далее точка O — точка пересечения биссектрис $\triangle ACH$ [3, 4]. Откуда $\angle AHO = \angle CHO$. Тогда $\triangle AOH = \triangle COH$ по двум углам и общей стороне. То есть $AH = CH$ (16).

- Пусть $BC = z$. Тогда $AD = 7z$ [8]. Трапеция $ABCD$ равнобедренная [1, 2]. Откуда находим $DH = \frac{AD-BC}{2} = 3z$. Значит, $CH = AH = AD - DH = 4z$ [16]. Тогда из прямоугольного $\triangle CHD$ имеем $\operatorname{tg}\angle CDA = \frac{CH}{DH}$. То есть $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$ (17) [13].

- $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то есть $\frac{4}{3} = \frac{2k}{1-k^2}$ [15, 17]. Решив это уравнение, находим $\frac{AM}{MB} = k = \frac{1}{2}$.

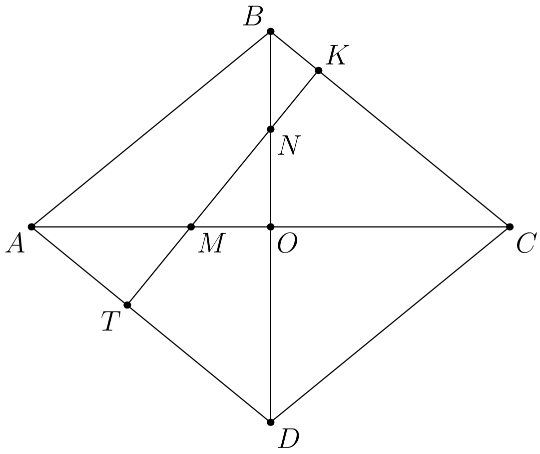
б) Ответ: $\frac{1}{2}$.

а) Дано:
$ABCD$ — ромб (1),
$M \in AC$, $N \in BD$,
$AM : MC = 1 : 2$ (2),
$BN : ND = 1 : 3$ (3),
$MN \perp AD$ (4).

а) Доказать:
$\cos \angle BAD = \frac{1}{5}$.

б) Дано:
$MN = 5$ (5).

б) Найти:
$S_{ABCD} = ?$



а) Доказательство:

- Пусть $O = AC \cap BD$. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то есть $AO = CO$, и $BO = DO$. Обозначим $MO = x$ (6). Тогда $AM = 2x$ (7), и $CO = 3x$ (8) [2]. Обозначим $NO = y$ (9). Тогда $BN = y$ (10), и $DO = 2y$ (11) [3].

- $AC \perp BD$ (12) [1]. Обозначим $\angle OMN = \alpha$. По сумме углов прямоугольного $\triangle MON$ находим $\angle MNO = 90° - \angle OMN = 90° - \alpha$. Пусть $K = MN \cap BC$. Тогда $\angle BKN = 90°$ [1, 4]. $\angle BNK = \angle MNO = 90° - \alpha$ (13) как вертикальные. По сумме углов прямоугольного $\triangle BNK$ находим $\angle KBN = 90° - \angle BNK = \alpha$ [4]. Таким образом, $\angle OMN = \angle KBN$. Следовательно, $\triangle MON \sim \triangle BOC$ по двум углам [12]. То есть $\frac{MO}{BO} = \frac{NO}{CO}$. Выражаем отсюда $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x$ (14) [6, 8, 9, 10]

- По теореме Пифагора для $\triangle MON$ имеем $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2}$ [12]. Откуда $MN = \frac{\sqrt{10}}{2}x$ (15) [6, 9, 14]. По теореме Пифагора для $\triangle BOC$ имеем $BC = \sqrt{BO^2 + CO^2}$ [12]. Находим $BC = \sqrt{15}x$ [8, 9, 10, 14]. Значит, и $AB = \sqrt{15}x$ (16) [1].

- $AO = AM + MO = 3x$ [6, 7]. Из прямоугольного $\triangle ABO$ имеем $\cos \angle BAO = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ [16]. $\cos \angle BAD = \cos 2\angle BAO$ [1]. Находим $\cos \angle BAD = 2\cos^2 \angle BAO - 1 = \frac{1}{5}$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Из уравнения [15] находим $x = \sqrt{10}$ [5]. Тогда $y = \sqrt{15}$ [14]. Получаем $AC = 6x = 6\sqrt{10}$ и $BD = 4y = 4\sqrt{15}$. Откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 60\sqrt{6}$.

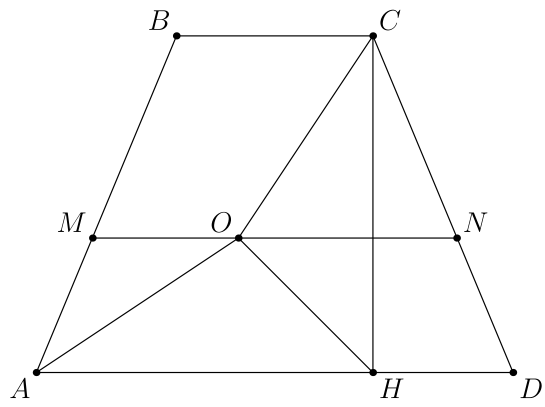
б) Ответ: $60\sqrt{6}$.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$AB = CD$ (2),
AO — биссектриса $\angle BAD$ (3),
CO — биссектриса $\angle BCD$ (4),
$M \in AB$,
$N = MO \cap CD$,
$MN \parallel AD$ (5).

а) Доказать:
$MN = AB$.

б) Дано:
$AO = CO$ (6),
$AM : BM = 2 : 3$ (7).

б) Найти:
$BC : AD = ?$



а) Доказательство:

- $\angle MOA = \angle DAO$ как накрест лежащие при параллельных прямых MN и AD [5]. При этом $\angle MAO = \angle DAO$ [2]. Откуда $\angle MAO = \angle MOA$. То есть $\triangle AMO$ равнобедренный с основанием AO. А значит, $AM = MO$ (8). Аналогично получаем $CN = NO$ (9) [4, 5]. Трапеция $ABCD$ равнобедренная [1, 2], следовательно, и трапеция $BCNM$ равнобедренная [5]. То есть $BM = CN$ (10), и $AM = DN$ (11). Получаем $AB = AM + BM = MO + NO = MN$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $\angle MAO = \alpha$ (12). Тогда $\angle BAD = 2\alpha$ [3]. Так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция, то $\angle CDA = \angle BAD = 2\alpha$ (13). $\angle BCD = 180^\circ - \angle CDA$ как внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC [1]. То есть $\angle BCD = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle NCO = 90^\circ - \alpha$ (14) [4].
- По сумме углов равнобедренного $\triangle AMO$ находим $\angle AMO = 180^\circ - 2\alpha$ [12]. Обозначим $BM = CN = NO = 3x$ (15) [9, 10]. Тогда $AM = MO = DN = 2x$ (16) [7, 8, 11]. По теореме синусов для $\triangle AMO$ имеем $\frac{MO}{\sin\angle MAO} = \frac{AO}{\sin\angle AMO}$. Откуда $AO = 4x\cos\alpha$ [12, 16]. По сумме углов равнобедренного $\triangle CNO$ находим $\angle CNO = 2\alpha$ [14]. По теореме синусов для $\triangle CNO$ имеем $\frac{NO}{\sin\angle NCO} = \frac{CO}{\sin\angle CNO}$. Откуда $CO = 6x\sin\alpha$ [14, 15]. Из условия [6] находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ (17).
- Проведем трапеции $ABCD$ высоту CH. По сумме углов прямоугольного $\triangle CHD$ находим $\angle DCH = 90^\circ - 2\alpha$ [13]. Откуда $\angle HCO = \angle NCO - \angle DCH = \alpha$ [14]. Получаем, что $\angle OAD = \angle HCO = \alpha$ [3, 12]. Далее точка O — точка пересечения биссектрис $\triangle ACH$ [3, 4]. Откуда $\angle AHO = \angle CHO$. Тогда $\triangle AOH = \triangle COH$ по двум углам и общей стороне. То есть $AH = CH$ (18).
- Пусть $AD = z$ и $BC = kz$. Трапеция $ABCD$ равнобедренная [1, 2]. Откуда находим $DH = \frac{AD-BC}{2} = \frac{1-k}{2}z$. Значит, $CH = AH = AD - DH = \frac{1+k}{2}z$ [18]. Тогда из прямоугольного $\triangle CHD$ имеем $\operatorname{tg}\angle CDA = \frac{CH}{DH}$. То есть $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1+k}{1-k}$ (19) [13].
- $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то есть $\frac{1+k}{1-k} = \frac{12}{5}$ [17, 19]. Решив это уравнение, находим $\frac{BC}{AD} = k = \frac{7}{17}$.

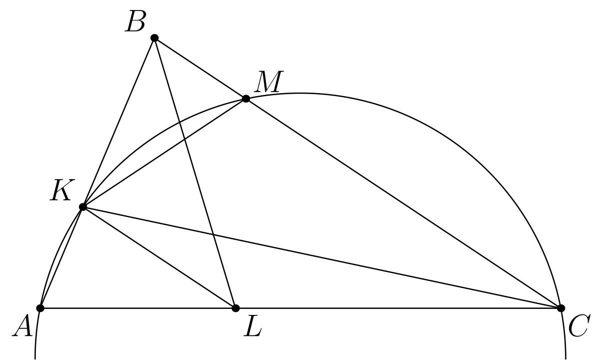
б) Ответ: $\frac{7}{17}$.

а) Дано:
BL — биссектриса $\triangle ABC$ (1),
$K \in AB$,
$KL \parallel BC$ (2),
$\triangle AKC$ вписан в окружность ω (3),
$M = BC \cap \omega$.

а) Доказать:
$AK = MB$.

б) Дано:
$S_{ABC} = 64$ (4),
$AB : BC = 3 : 5$ (5).

б) Найти:
$S_{AKMC} = ?$



а) Доказательство:

- $\angle MBL = \angle KLB$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и KL [2]. При этом $\angle MBL = \angle BKL$ [1]. Откуда $\angle BKL = \angle KLB$. То есть $\triangle KLB$ равнобедренный с основанием BL, и $KB = KL$ (6).

- $\angle ABC = \angle AKL$ (7) как соответственные при параллельных прямых BC и KL. Аналогично $\angle ACB = \angle ALK$. $\angle AKM + \angle ACB = 180°$ как противоположные углы вписанного $AKMC$ [3]. При этом $\angle AKM + \angle BKM = 180°$ как смежные. Откуда $\angle BKM = \angle ACB = \angle ALK$ (8). Таким образом, $\triangle ALK = \triangle MKB$ (9) по стороне и двум углам [6, 7, 8]. То есть $AK = MB$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $AL = 3x$. По свойству биссектрисы имеем $AL : CL = AB : BC$ [1]. Откуда находим $CL = 5x$ [5], и $AC = AL + LC = 8x$ (10). Из равенства треугольников находим $MK = AL = 3x$ (11) [9].

- $\triangle ABC \sim \triangle MBK$ по двум углам [8]. Находим коэффициент подобия этих треугольников $k = \frac{AC}{MK} = \frac{8}{3}$ [10, 11]. Площади подобных треугольников относятся как квадраты их коэффициентов подобия. То есть $S_{ABC} : S_{MBK} = k^2 = \frac{64}{9}$. Пусть $S_{ABC} = 64S$. Тогда $S_{MBK} = 9S$. Находим $S = 1$ [4], и $S_{AKMC} = S_{ABC} - S_{MBK} = 55S = 55$.

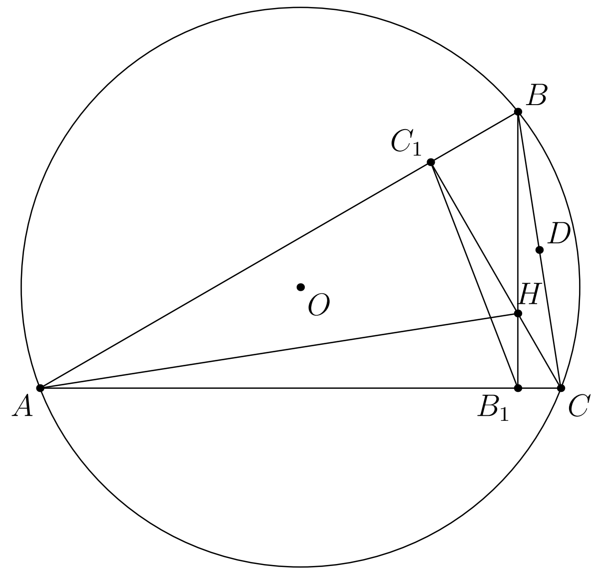
б) Ответ: 55.

а) Дано:
$\triangle ABC$ остроугольный,
BB_1 и CC_1 — высоты $\triangle ABC$ (1),
$H = BB_1 \cap CC_1$.

а) Доказать:
$\angle BAH = \angle BB_1C_1$.

б) Дано:
$\triangle ABC$ вписан в окружность $\omega(O, R)$,
$B_1C_1 = 18$ (2),
$\angle BAC = 30°$ (3).

б) Найти:
$\rho(O, BC) = ?$



а) Доказательство:

- $\angle CC_1A = \angle BB_1A = 90°$ [1]. То есть $\angle CC_1A + \angle BB_1A = 180°$. Следовательно, четырехугольник AC_1HB_1 вписан в окружность. При этом $\angle BAH = \angle BB_1C$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу C_1H, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle CB_1B = \angle BC_1C$ [1], откуда четырехугольник BC_1B_1C вписан в окружность. Следовательно, $\angle CBC_1 + \angle CB_1C = 180°$ как противоположные углы вписанного четырехугольника. При этом $\angle CB_1C + \angle AB_1C_1 = 180°$ как смежные. Откуда $\angle CBC_1 = \angle AB_1C_1$. Аналогично получаем $\angle BCB_1 = \angle AC_1B_1$. Следовательно, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ACB$ (4) по двум углам.

- Найдем коэффициент подобия $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle ACB$. $k = \frac{AB_1}{AB} = \cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [3]. $BC = \frac{B_1C_1}{k}$. Находим $BC = 12\sqrt{3}$ (5) [2].

- По теореме синусов для $\triangle ABC$ имеем $R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC}$. Находим $OB = R = 12\sqrt{3}$ (6) [3, 5].

- Пусть D — середина отрезка BC. Тогда $BD = \frac{1}{2}BC = 6\sqrt{3}$ [5]. Треугольник $OB = OC$ как радиусы ω. То есть $\triangle BOC$ — равнобедренный. Значит, медиана OD является высотой и искомым расстоянием $\rho(O, BC)$. По теореме Пифагора для $\triangle BOD$ имеем $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2}$. Находим $\rho(O, BC) = OD = 18$ [6].

б) Ответ: 18.

а) Дано:

$ABCDE$ — вписан в окружность ω (1),
$M = BE \cap AD$,
$BCDM$ — параллелограмм (2).

а) Доказать:

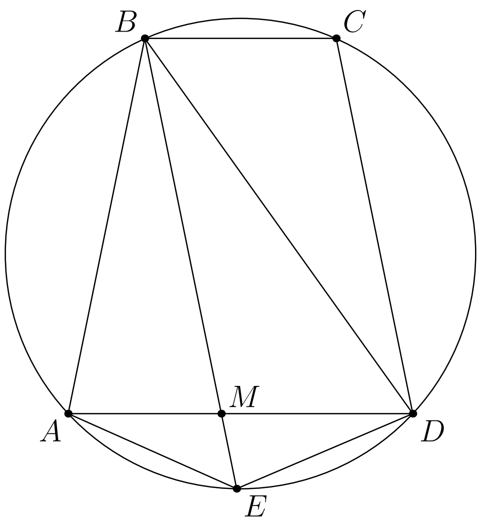
$BC = DE$.

б) Дано:

$BE = 12$ (3),
$BC = 5$ (4),
$AD = 9$ (5).

б) Найти:

$AB = ?$



а) Доказательство:

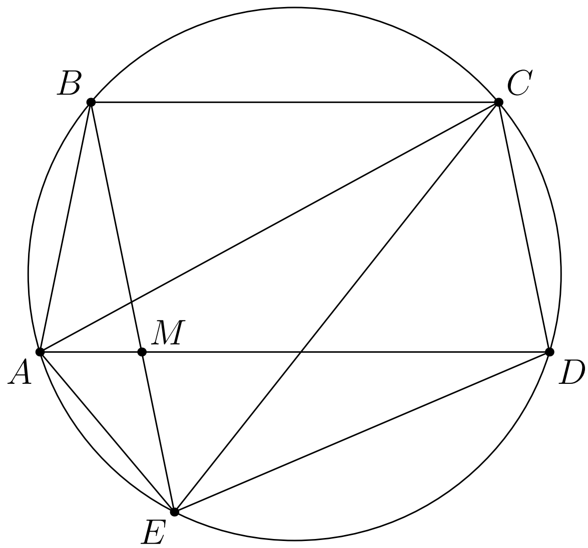
- $CD \parallel BE$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$ [2]. Значит, $BCDE$ — трапеция, вписанная в окружность ω. Следовательно, эта трапеция равнобедренная, то есть $BC = DE$, что и требовалось доказать. Отметим, что $BC = MD$ как противоположные стороны параллелограмма, то есть $BC = DM = DE$ (6).

б) Решение:

- $BC \parallel DM$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$ [2]. Значит, $ABCD$ — трапеция, вписанная в окружность ω. Следовательно, эта трапеция равнобедренная, то есть $CD = AB$. При этом $CD = BM$ как противоположные стороны параллелограмма. То есть $CD = BM = AB$ (7).

- Пусть $CD = BM = AB = x$ [7]. Тогда $EM = BE - BM = 12 - x$ [3], $DM = BC = 5$ [4, 6] и $AM = AD - DM = 4$ [5]. По свойству пересекающихся хорд имеем $AM \cdot DM = BM \cdot EM$, то есть $20 = x(12 - x)$. Решив это уравнение находим два возможных решения $x = 2$ или $x = 10$. Решение $x = 2$ не удовлетворяет неравенству треугольника ABM: $AM < AB + BM$. Следовательно, задача имеет единственное решение $AB = x = 10$.

б) Ответ: 10.



а) Дано:

$ABCDE$ — вписан в окружность ω (1),
$AB = CD = 5$ (2),
$BC = DE = 8$ (3).

а) Доказать:

$AC = CE$.

б) Дано:

$AD = 10$ (4).

б) Найти:

$BE = ?$

а) Доказательство:

- $\angle CAD = \angle AEB$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды AB и CD [1, 2]. $\angle BEC = \angle DAE$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды BC и DE [1 ,3]. Следовательно, $\angle CAE = \angle CAD + \angle DAE = \angle AEB + \angle BEC = \angle CEA$. А значит, $\triangle CEA$ равнобедренный с основанием AE, то есть $AC = CE$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle BAC = \angle BCA$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды AB и CD [1, 2]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых AD и BC. Откуда $AD \parallel BC$ (5).

- $\angle BEC = \angle DCE$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды BC и DE [1, 3]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых CD и BE. Откуда $CD \parallel BE$ (6).

- Четырехугольник $BCDM$ — параллелограмм [5, 6]. Откуда $DM = BC = 8$ [3], и $BM = CD = 5$ (7) [2]. Находим $AM = AD - DM = 2$ [4]. По свойству пересекающихся хорд имеем $AM \cdot DM = BM \cdot EM$. Откуда находим $EM = \frac{16}{5}$ (8).

- Окончательно находим $BE = BM + EM = \frac{41}{5}$ [7, 8].

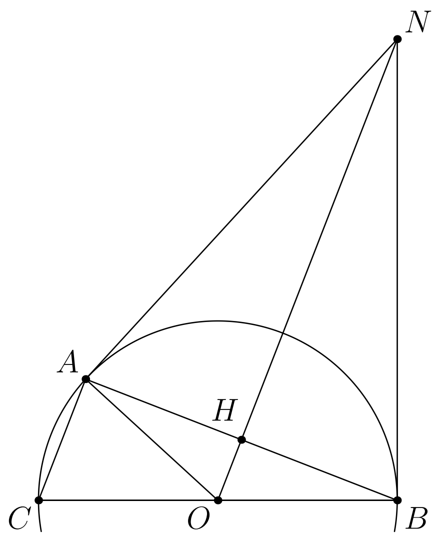
б) Ответ: $\frac{41}{5}$.

а) Дано:
Окружность $\omega(O)$ вписана в $\angle ANB$ (1),
$A = NA \cap \omega$,
$B = NB \cap \omega$,
BC — диаметр ω (2).

а) Доказать:
$\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Дано:
$AC = 14$ (3),
$AB = 36$ (4).

б) Найти:
$\rho(N, AB) = ?$



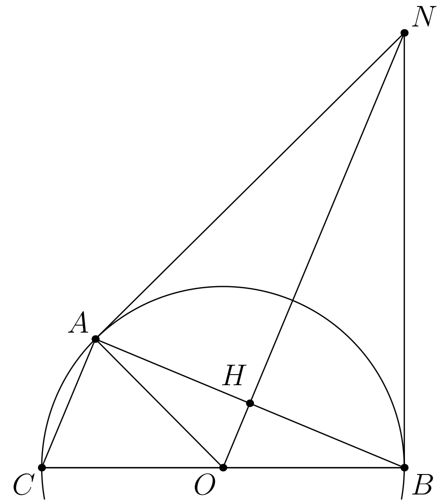
а) Доказательство:

- Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе. Значит, NO — биссектриса $\angle ANB$, то есть $\angle ANO = \angle BNO = \alpha$ (5), и $\angle ANB = 2\alpha$ (6).
- $\angle NBO = 90°$, так как NB касательная к ω [1]. По сумме углов прямоугольного $\triangle OBN$ имеем $\angle BON = 90° - \angle BNO$. Находим $\angle BON = 90° - \alpha$ (7) [5]. Аналогично получаем $\angle AON = 90° - \alpha$ (8). $\angle AOB = \angle BON + \angle AON$. Откуда $\angle AOB = 180° - 2\alpha$ (9).
- $OA = OB$ как радиусы ω [1]. Откуда $\triangle AOB$ равнобедренный с основанием AB (10), то есть $\angle OBA = \angle OAB$. По сумме углов $\triangle AOB$ имеем $\angle ABC = \frac{180° - \angle AOB}{2}$. Находим $\angle ABC = \alpha$ [9]. Тогда $\angle ANB = 2\angle ABC = 2\alpha$ [6], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Пусть $H = ON \cap AB$. Тогда OH — биссектриса равнобедренного $\triangle AOB$, проведенная к основанию [7, 8, 10]. Следовательно, $AH = BH = 18$ (11) [4], и $\angle OHB = 90°$. Откуда $\rho(N, AB) = NH$ (12).
- $OB = OC$ как радиусы ω [1]. Значит, OH — средняя линия $\triangle ABC$ [11]. То есть $OH = \frac{AC}{2}$. Находим $OH = 7$ (13) [3].
- $\angle NAO = \angle NBO = 90°$, так как NA и NB — касательные к ω. Откуда $\angle NBO + \angle NAO = 180°$. Следовательно, четырехугольник $AOBN$ вписан в окружность. Тогда по свойству пересекающихся хорд имеем $OH \cdot NH = AH \cdot BH$. Из этого уравнения находим $\rho(N, AB) = NH = \frac{324}{7}$ [11, 12, 13].

б) Ответ: $\frac{324}{7}$.



а) Дано:

Окружность $\omega(O)$ вписана в $\angle ANB$ (1),
$A = NA \cap \omega$,
$B = NB \cap \omega$,
BC — диаметр ω (2).

а) Доказать:

$AC \parallel NO$.

б) Дано:

$AB = 24$ (3),
$AC = 10$ (4).

б) Найти:

$NO = ?$

а) Доказательство:

- Пусть $H = ON \cap AB$. Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе. Значит, NH — биссектриса $\angle ANB$. При этом $AN = BN$ как отрезки касательных к ω, проведенных из одной точки [1]. То есть $\triangle ANB$ равнобедренный с основанием AB. Тогда биссектриса NH также является и медианой, и высотой. Откуда $AH = BH$ (5), и $\angle AHN = 90°$ (6).

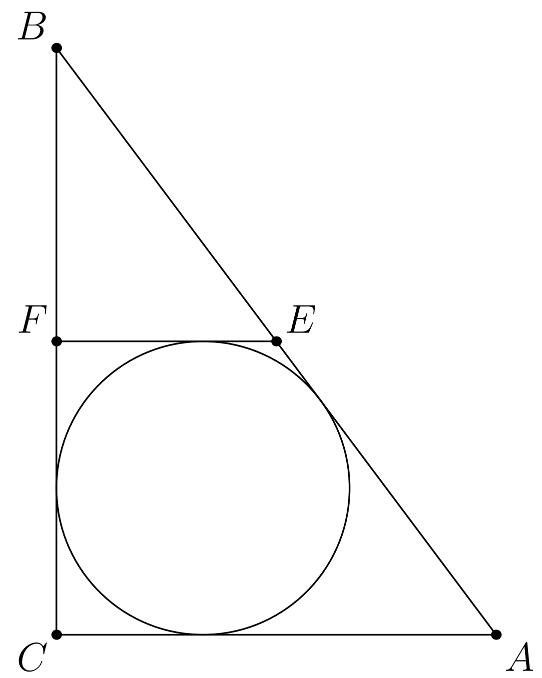
- $\angle BAC = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр BC [2]. То есть $\angle BAC = \angle AHN = 90°$ [6]. Эти углы являются накрест лежащими при прямых AC и NO. То есть $AC \parallel NO$ (7), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Находим $AH = BH = 12$ (8) [3, 5]. Тогда OH — средняя линия $\triangle ABC$ [7]. Откуда $OH = \frac{AC}{2}$. Находим $OH = 5$ (9) [4].

- $\angle NAO = \angle NBO = 90°$, так как AN и BN касательные к ω [1]. То есть $\angle NAO + \angle NBO = 180°$. Следовательно, четырехугольник $AOBN$ вписан в окружность. По свойству пересекающихся хорд имеем $OH \cdot NH = AH \cdot BH$. Откуда $NH = \frac{144}{5}$ [8, 9]. Окончательно находим $NO = NH + OH = \frac{169}{5}$ [9].

б) Ответ: $\frac{169}{5}$.



а) Дано:

$P_{ABC} = 24$ (1),
E — середина AB (2),
F — середина BC (3),
Окружность ω вписана в $\triangle ABC$ (4),
EF касается ω (5).

а) Доказать:

$AC = 6$.

б) Дано:

$\angle ACB = 90°$ (6).

б) Найти:

$S_{ABC} = ?$

а) Доказательство:

- Обозначим $AC = 2x$ (7). FE — средняя линия $\triangle ABC$ [2, 3]. Значит, $FE = \frac{AC}{2} = x$. В четырехугольник $ACFE$ вписана окружность ω [4, 5]. Откуда $CF + AE = FE + AC$. Находим $CF + AE = 3x$ (8). При этом $BF + BE = CF + AE = 3x$ (9) [2, 3].

- $P_{ABC} = AB + AC + BC = AC + CF + BF + AE + BE$. Откуда $P_{ABC} = 8x$ [7, 8, 9]. Из этого уравнения находим $x = 3$ [1]. А значит, $AC = 6$ (10) [7], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $BC = b$. Тогда $AB = P_{ABC} - BC - AC$, то есть $AB = 18 - b$ [1, 10]. По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ имеем $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Получаем уравнение $36 + b^2 = (18 - b)^2$ [10]. Решив его, находим $BC = b = 8$. Откуда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = 24$ [10].

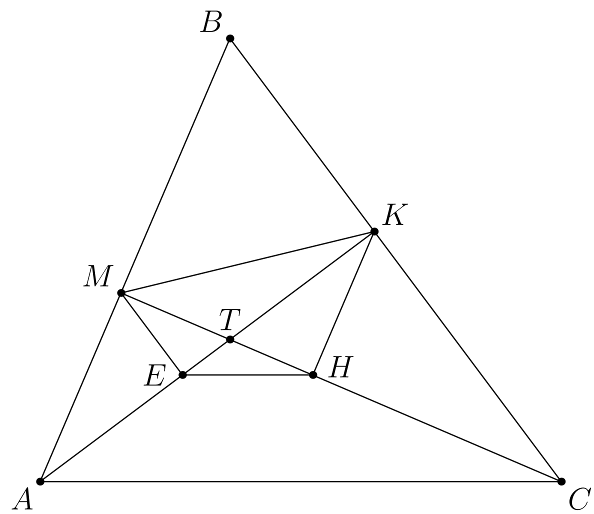
б) Ответ: 24.

а) Дано:
$\triangle ABC$ остроугольный,
AK и CM — высоты $\triangle ABC$ (1),
$E \in AK$, $H \in CM$,
$ME \perp AK$ (2),
$KH \perp CM$ (3).

а) Доказать:
$EH \parallel CA$.

б) Дано:
$\angle ABC = 60^\circ$ (4).

б) Найти:
$EH : CA = ?$



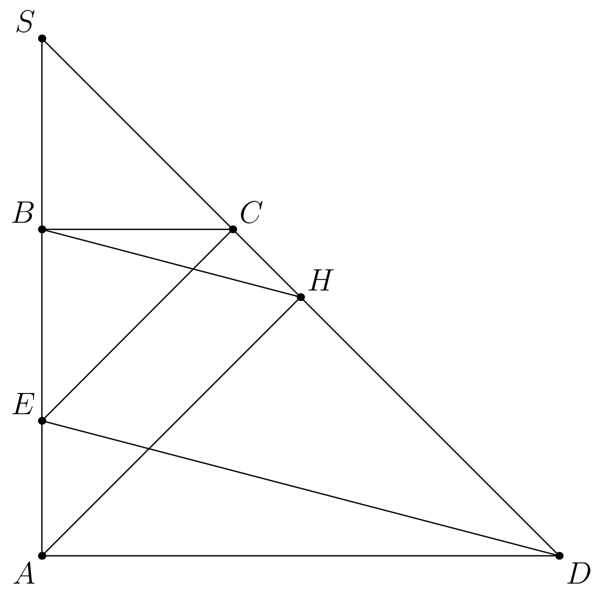
а) Доказательство:

- $\angle AMC = \angle CKA = 90^\circ$ [1]. Эти равные углы опираются на один отрезок AC. Следовательно, четырехугольник $AMKC$ вписан в окружность (5). Откуда $\angle CAK = \angle CMK$ (6) как вписанные, опирающиеся на одну дугу CK.
- $\angle KEM = \angle MHK = 90^\circ$ [2, 3]. Эти равные углы опираются на один отрезок MK. Следовательно, четырехугольник $MEHK$ вписан в окружность. Откуда $\angle CMK = \angle KEH$ (7) как вписанные, опирающиеся на одну дугу KH.
- Получаем $\angle CAK = \angle KEH$ [6, 7]. Эти углы являются соответственными при прямых EH и CA. Откуда $EH \parallel CA$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle ACK + \angle AMK = 180^\circ$ как противоположные углы вписанного четырехугольника $AMKC$ [5]. При этом $\angle BMK + \angle AMK = 180^\circ$ как смежные. Откуда $\angle ACK = \angle BMK$. Аналогично получаем $\angle BAC = \angle BKM$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle KBM$ (8) по двум углам.
- Из подобия треугольников имеем $\frac{MK}{CA} = \frac{BM}{BC} = \cos\angle ABC$ [8]. Находим $\frac{MK}{CA} = \frac{1}{2}$ (9) [4].
- Пусть $T = AK \cap CM$. $\angle BMC = \angle BKA = 90^\circ$ [1]. То есть $\angle BMC + \angle BKA = 180^\circ$. Значит, четырехугольник $BMTK$ вписан в окружность. Следовательно, $\angle MTK = 180^\circ - \angle ABC$. Находим $\angle MTK = 120^\circ$ (10) [4].
- $\angle MTE = 180^\circ - \angle MTK = 60^\circ$ [10] как смежные. Из прямоугольного $\triangle MET$ имеем $\frac{ET}{MT} = \cos\angle MTE$ [2]. То есть $\frac{ET}{MT} = \frac{1}{2}$ (11).
- $\angle MTK = \angle ETH$ как вертикальные. Откуда $\triangle MTK \sim \triangle ETH$ по двум углам [7]. Значит, $\frac{EH}{MK} = \frac{ET}{MT}$. Находим $\frac{EH}{MK} = \frac{1}{2}$ (12) [11].
- Получаем $\frac{EH}{CA} = \frac{EH}{MK} \cdot \frac{MK}{CA} = \frac{1}{4}$ [9, 12].

б) Ответ: $\frac{1}{4}$.



а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$AB \perp AD$ (2),
$E \in AB$, $H \in CD$,
$\angle AHD = 90^\circ$ (3),
$\angle DCE = 90^\circ$ (4).

а) Доказать:
$BH \parallel ED$.

б) Дано:
$\angle BCD = 135^\circ$ (5).

б) Найти:
$BH : ED = ?$

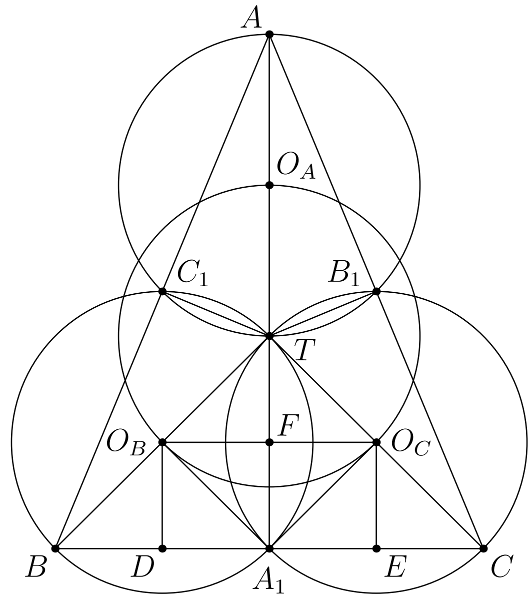
а) Доказательство:

- Пусть $S = AB \cap CD$. Обозначим $SB = x$ (6), $BE = bx$ (7), $EA = ax$ (8), $SC = y$ (9). По теореме Фалеса имеем $\frac{SB}{AB} = \frac{SC}{CD}$. Так как $AB = EA + BE = (a + b)x$, имеем $\frac{x}{(a+b)x} = \frac{y}{CD}$. Откуда $CD = (a + b)y$ (10).
- $\angle AHD = \angle DCE$ [3, 4]. Эти углы являются соответственными при прямых AH и CE. То есть $AH \parallel CE$. Откуда по теореме Фалеса имеем $\frac{SE}{EA} = \frac{SC}{CH}$. Обозначим $CH = az$ (11). Так как $SE = SB + BE = (b + 1)x$ [6, 7], имеем $\frac{(b+1)x}{ax} = \frac{SC}{az}$ [8, 11]. Откуда $SC = (b + 1)z$ (12).
- Найдем соотношение y и z. Имеем $SC = y = (b+1)z$ [9, 12]. Тогда $HD = CD - CH = (a+b)y - az = (a+b)(b+1)z - az$ [10, 11]. То есть $HD = b(a+b+1)z$ (13).
- Имеем $SH = SC + CH = (a + b + 1)z$ [11, 12]. Откуда получаем равенство $\frac{SB}{BE} = \frac{SH}{HD} = \frac{1}{b}$ [6, 7, 13]. Следовательно, по теореме, обратной теореме Фалеса, получаем $BH \parallel ED$ (14), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle BCE = \angle BCD - \angle DCE$. Находим $\angle BCE = 45^\circ$ [4, 5]. $\angle SCE = 180^\circ - \angle BCD$ как смежный, то есть $\angle SCE = 45^\circ$ [5]. Получаем $\angle SCE = \angle BCE$. То есть $\angle BC$ — биссектриса $\triangle CSE$. BC также является высотой [1, 2]. Значит, BC также и медиана, то есть $SB = BE$ (15).
- BH — средняя линия $\triangle SDE$ [14, 15]. Следовательно, $\frac{BH}{ED} = \frac{1}{2}$.

б) Ответ: $\frac{1}{2}$.



а) Дано:

A_1 — середина BC (1),
B_1 — середина AC (2),
C_1 — середина AB (3),
$\triangle AB_1C_1$ вписан в окружность $\omega_A(O_A)$,
$\triangle A_1BC_1$ вписан в окружность $\omega_B(O_B)$,
$\triangle A_1B_1C$ вписан в окружность $\omega_C(O_C)$,
$T = \omega_B \cap \omega_C$, $T \neq A_1$.

а) Доказать:

$\omega_A \cap \omega_B \cap \omega_C = T$.

б) Дано:

$AB = 13$ (4),
$AC = 13$ (5),
$BC = 10$ (6),
$\triangle O_AO_BO_C$ вписан в окружность $\omega(R)$

б) Найти:

$R = ?$

а) Доказательство:

- A_1C_1 и A_1B_1 — средние линии $\triangle ABC$ [1, 2, 3]. Откуда $A_1C_1 = B_1C$ [2], и $A_1B_1 = BC_1$ [3]. При этом $A_1B = A_1C$ (7) [1], и $\triangle BC_1A_1 = \triangle A_1B_1C$ (8) по трем сторонам.
- O_B является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам $\triangle A_1BC_1$. Пусть O_BD — серединный перпендикуляр к отрезку BA_1 (9). Аналогично O_CE — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C (10).
- Вокруг равных треугольников описаны равные окружности, а значит, $O_CC = O_BB$ [8]. При этом $BD = EC$ как половины равных отрезков [7, 9, 10]. Откуда $\triangle BDO_B = \triangle CEO_C$ по гипотенузе и катету [9, 10]. То есть $O_BD = O_CE$ (11).
- $O_BD \perp BC$ [9], и $O_CE \perp BC$ [10]. Следовательно, $O_BD \parallel O_CE$, и DEO_CO_B — прямоугольник [9, 10, 11]. То есть $O_BO_C \parallel BC$ (12).
- $O_BT = O_BA_1 = O_CT = O_CA_1$ как радиусы равных окружностей [8]. Откуда $O_BTO_CA_1$ — ромб, то есть $O_BO_C \perp A_1T$ как его диагонали. Следовательно, $A_1T \perp BC$ [12]. $\angle TA_1C$ — прямой, опирающийся на хорду CT окружности ω_3. Получаем, что CT — диаметр ω_3. Аналогично BT — диаметр ω_2. Итак, $CT = BT$ [8].
- Пусть $K = \omega_2 \cap \omega_1$ и $K \neq C_1$. Рассуждая аналогично, получаем, что BK и AK — диаметры окружностей ω_2 и ω_1 соответственно. Следовательно, точки K и T совпадают, $AT = BT = CT$ (13), и $\omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 = T$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- AA_1 — медиана равнобедренного $\triangle ABC$ [4, 5], а значит, и его высота. По теореме Пифагора для $\triangle AA_1B$ имеем $AA_1 = \sqrt{AB^2 - A_1B^2}$. Находим $AA_1 = 12$ [1, 4, 6]. Тогда $\sin\angle ABC = \frac{AA_1}{AB}$. То есть $\sin\angle ABC = \frac{12}{13}$ (14) [4].
- По теореме синусов для $\triangle ABC$ имеем $BT = R_{ABC} = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}$ [13]. Откуда $BT = \frac{169}{24}$ [14]. $O_AT = O_BT = O_CT$ радиусы равных окружностей. $R = O_BT = \frac{BT}{2} = \frac{169}{48}$.

б) Ответ: $\frac{169}{48}$.

а) Дано:

$AB \parallel CD$ (1),
$P \in AB$,
$AP = BP$ (2),
$E = AC \cap BD$,
$M = AC \cap DP$,
$N = BD \cap CP$,
$CD : AB = 2 : 3$ (3).

а) Доказать:

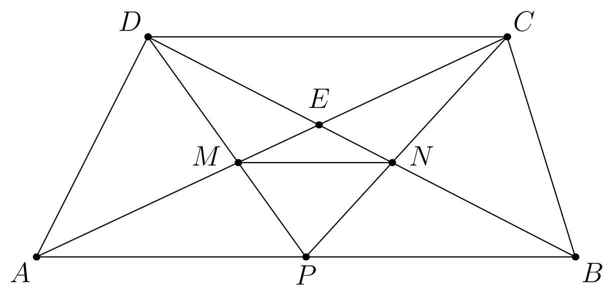
$\triangle MEN \sim \triangle AEB$.

б) Дано:

$S_{ABCD} = 1225$ (4).

б) Найти:

$S_{MEN} = ?$



а) Доказательство:

- $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle BDC = \angle DBA$ как накрест лежащие [1]. Откуда $\triangle AEB \sim \triangle CED$. Следовательно, $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$ (5) [3].
- $\angle BPN = \angle DCN$ и $\angle PBN = \angle CDN$ как накрест лежащие [1]. Откуда $\triangle PBN \sim \triangle CDN$. Следовательно, $\frac{PN}{CN} = \frac{BN}{DN} = \frac{PB}{CD} = \frac{3}{4}$ (6) [2, 3]. Воспользуемся тем, что $BE + DE = BN + DN$ и найдем $\frac{BE}{NE} = \frac{7}{2}$ (7) [5, 6].
- $\angle PAM = DCM$ и $\angle APM = \angle CDM$ как накрест лежащие [1]. Откуда $\triangle APM \sim \triangle CDM$. Следовательно, $\frac{AM}{CM} = \frac{PM}{DM} = \frac{AP}{CD} = \frac{3}{4}$ (8) [2, 3]. Воспользуемся тем, что $AE + CE = AM + CM$ и найдем $\frac{AE}{ME} = \frac{7}{2}$ (9).
- У треугольников MEN и AEB угол AEB общий, а также $\frac{BE}{NE} = \frac{AE}{ME} = \frac{2}{7}$ (10) [7, 9]. Следовательно, $\triangle MEN \sim \triangle AEB$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $S_{AEB} = 9S$ (11). Тогда $S_{CED} = 4S$ (12) [5] и $S_{MEN} = \frac{36}{49}S$ (13) [10].
- По свойству трапеции $S_{ABCD} = (\sqrt{S_{AEB}} + \sqrt{S_{CED}})^2 = 25S$ [1, 11, 12]. Откуда $S = 49$ [4]. Тогда находим, что $S_{MEN} = 36$ [13].

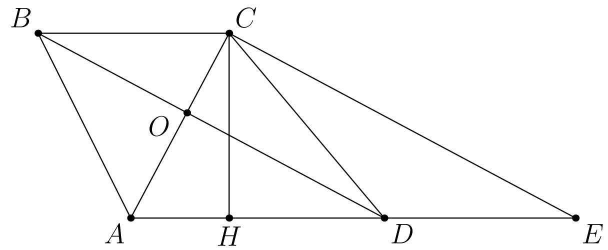
б) Ответ: 36.

а) Дано:
$AD \parallel BC$ (1),
$O = AC \cap BD$,
$AC = 8$ (2),
$BD = 15$ (3),
$AD + BC = 17$ (4).

а) Доказать:
$AC \perp BD$.

б) Дано:
$H \in AD$,
$CH \perp AD$ (5).

б) Найти:
$CH = ?$



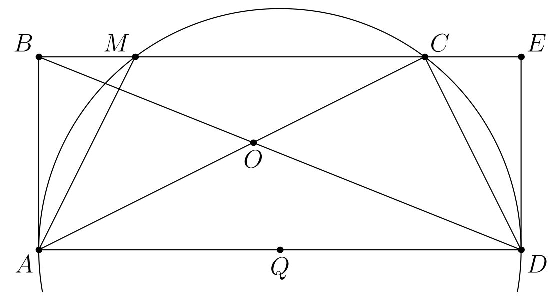
а) Доказательство:

- Пусть $E \in AD$ такая, что $CE \parallel BD$ (6). Тогда $BCED$ — параллелограмм [1, 6]. Откуда $CE = BD = 15$ (7) [3] и $BC = DE$. Значит, $AE = AD + DE = AD + BC = 17$ (8) [4].
- Заметим, что $AC^2 + CE^2 = AE^2$ [2, 7, 8]. Откуда по теореме обратной теореме Пифагора заключаем, что $\angle ACE = 90°$ (9).
- $\angle AOD = \angle ACE = 90°$ [9] как соответственные при параллельных прямых CE и BD и секущей AC [6]. То есть $AC \perp BD$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\triangle AHC \sim \triangle ACE$ по двум углам [5, 9]. Откуда $\frac{AC}{AE} = \frac{CH}{CE}$. Из этого уравнения находим $CH = \frac{120}{17}$ [2, 7, 8].

б) Ответ: $\frac{120}{17}$.



а) Дано:

$AD \parallel BC$ (1),
$\angle BAD = 90^\circ$ (2),
AD — диаметр ω (3),
$C \in \omega$ (4),
$M = BC \cap \omega$ (5).

а) Доказать:

$\angle BAM = \angle CAD$.

б) Дано:

$O = AC \cap BD$,
$BC : BM = 4$ (6),
$AB = 6$ (7).

б) Найти:

$S_{AOB} = ?$

а) Доказательство:

- Пусть $E \in BC$ такая, что $DE \parallel AB$. Тогда $ABED$ — прямоугольник (8) [1, 2]
- Трапеция $AMCD$ вписана в окружность [1, 3, 4, 5]. Следовательно, $AM = CD$. Откуда $\triangle ABM = \triangle DEC$ (9) по гипотенузе и катету [8]. То есть $\angle BAM = \angle EDC$ (10).
- DE перпендикулярен диаметру AD [3, 8]. Следовательно, DE — касательная к окружности ω. Откуда $\angle EDC = \angle CAD$ как угол между касательной и хордой CD. Таким образом, $\angle BAM = \angle CAD$ (11) [10], что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $\angle BCA = \angle CAD$ (12) как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC [1]. Откуда $\angle BAM = \angle BCA$ (13) [11].
- Пусть $BM = x$. Тогда $BC = 4x$ [6]. $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ по двум углам [13]. То есть $\frac{AB}{CB} = \frac{BM}{AB}$. Откуда $x = 3$, а значит, $BM = 3$ (14) и $BC = 12$ (15). А также $MC = BC - BM = 9$ (16).
- $EC = BM = 3$ [9, 14], а значит, $AD = BE = BC + EC = 15$ [8, 15]. $\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные. Откуда $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по двум углам [12]. Следовательно, $\frac{AO}{CO} = \frac{AD}{BC}$. То есть $\frac{AO}{CO} = \frac{5}{4}$ (17) [15].
- $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 36$ [2, 7, 15]. Треугольники ABC и AOB имеют общую высоту, а их основания относятся как $\frac{AO}{AC} = \frac{5}{9}$ [17]. Следовательно, $S_{AOB} = S_{ABC} \cdot \frac{5}{9} = 20$.

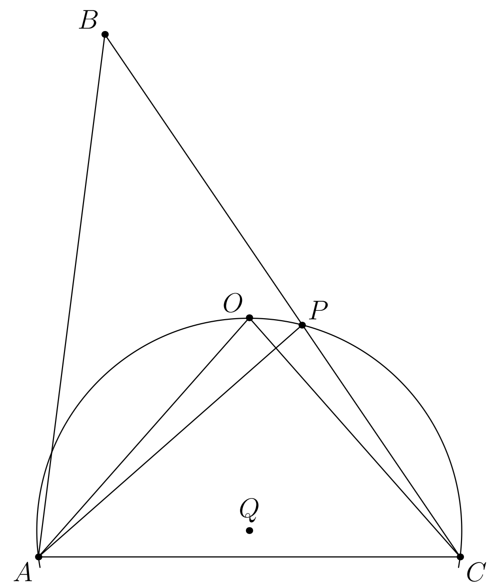
б) Ответ: 20.

а) Дано:
$\triangle ABC$ остроугольный,
$\angle BAC = 2\angle ABC$ (1),
ω_1 — окружность, описанная вокруг $\triangle ABC$ (2),
O — центр ω_1 (3),
ω_2 — окружность, описанная вокруг $\triangle AOC$ (4),
$P = \omega_2 \cap BC$ (5).

а) Доказать:
$\triangle ABC \sim \triangle PAC$.

б) Дано:
$BC = 6$ (6),
$AC = 4$ (7).

б) Найти:
$AB = ?$



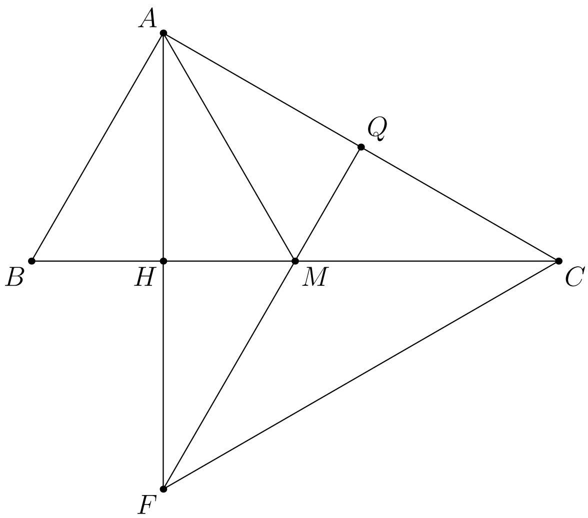
а) Доказательство:

- $\angle APC = \angle AOC$, так как они вписаны в окружность ω_2 и опираются на дугу AC [4, 5]. $\angle AOC = 2\angle ABC$, как центральный и вписанные углы, опирающиеся на дугу AC окружности ω_1 [2, 3]. Следовательно, $\angle APC = 2\angle ABC$ (8).
- $\angle BAC = \angle APC$ [1, 8]. Откуда $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ по двум углам, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Обозначим $\angle ABC = \alpha$ (9), тогда $\angle BAC = 2\alpha$ [1]. По теореме синусов для $\triangle ABC$ имеем $\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$. То есть $6\sin\alpha = 4\sin 2\alpha$ [6, 7]. Воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, решим полученное уравнение и найдём $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ (10).
- Пусть $AB = x$. По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$ [9]. То есть $16 = x^2 + 36 - 9x$ [6, 7, 10]. Решив это уравнение находим $x = 4$ (11) или $x = 5$.
- При $AB = x = 4$ получаем $AB = AC$ [7]. То есть $\triangle ABC$ равнобедренный. Откуда $\angle ABC = \angle BCA = \alpha$. При этом $\angle BAC = 2\alpha$ [1]. По сумме углов $\triangle ABC$ находим $\alpha = 45°$. Но $\cos\alpha = \frac{3}{4} \neq \cos 45°$ [10]. Следовательно, корень $x = 4$ [11] посторонний.

б) Ответ: 5.



а) Дано:
AH — высота $\triangle ABC$ (1),
AM — медиана $\triangle ABC$ (2),
$\angle ACB = 30^\circ$ (3),
$H \in BM$,
MQ — высота $\triangle ACM$ (4),
$F = MQ \cap AH$,
AM — биссектриса $\angle HAC$ (5).

а) Доказать:
$\angle BAC = 90^\circ$.

б) Дано:
$AB = 10$ (6).

б) Найти:
$S_{CFM} = ?$

а) Доказательство:

- По сумме углов $\triangle HAC$ находим $\angle HAC = 60^\circ$ [1, 3]. Тогда $\angle MAC = \angle HAM = \angle ACB = 30^\circ$ (7) [3, 5].
- $\triangle AMC$ равнобедренный [7]. Значит, $AM = MC = BM$ [2]. Медиана равна половине стороны, к которой проведена, следовательно, $\triangle ABC$ прямоугольный, $\angle BAC = 90^\circ$ (8), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- Находим $\angle BAH = 30^\circ$ (9) [7, 8]. Тогда в прямоугольном $\triangle ABH$ имеем $AH = AB \cdot \cos\angle BAH$ и $BH = AB \cdot \sin\angle BAH$. То есть $AH = 5\sqrt{3}$ (10) и $BH = 5$ (11) [1, 6].
- В $\triangle ABM$ высота AH совпадает с биссектрисой [1, 7, 9]. Следовательно, $\triangle ABM$ равнобедренный и $HM = BH = 5$ (12) [11]. Находим также $MC = BH + HM = 10$ (13) [2].
- По сумме углов $\triangle MQC$ находим $\angle QMC = 60^\circ$ [3, 4]. $\angle HMF = \angle QMC = 60^\circ$ как вертикальные. По сумме углов $\triangle HMF$ находим $\angle HFM = 30^\circ$ [1]. Тогда $\triangle AMF$ равнобедренный [7], откуда высота MH является медианой, то есть $HF = AH = 5\sqrt{3}$ (14) [10].
- $S_{CFM} = \frac{1}{2} \cdot HF \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$ [13, 14].

б) Ответ: $25\sqrt{3}$.

а) Дано:

$ABCD$ — параллелограмм (1),
$M \in AD$,
$\angle ABM = \angle CBM$ (2),
$O = AC \cap BD$ (3),
$\triangle ABM$ вписан в окружность ω (4),
BC касается ω (5),
OM касается ω (6).

а) Доказать:

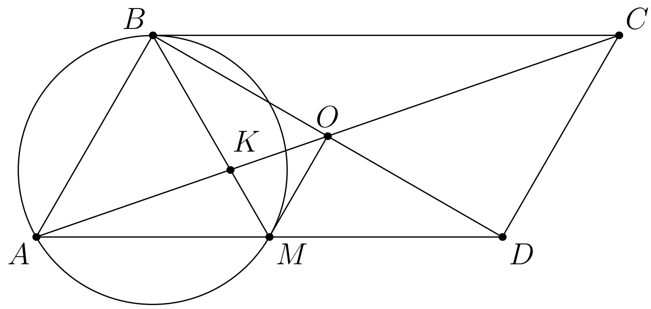
$AB \perp BD$.

б) Дано:

$K = AC \cap BM$,
$OM = 2$ (7).

б) Найти:

$S_{KODM} = ?$



а) Доказательство:

- $\angle CBM$ — угол между касательной BC и хордой BM окружности ω, в то же время $\angle BAM$ вписан в ω [5, 6]. Следовательно, $\angle BAM = \angle CBM$. $\angle CBM = \angle AMB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BM [1]. Откуда $\triangle ABM$ — равносторонний (8) [2].

- $\angle OMB$ — угол между касательной OM и хордой BM окружности ω, в то же время $\angle BAM$ вписан в ω [4, 6]. Следовательно, $\angle BAM = \angle OMB$. Откуда $\angle ABM = \angle OMB$ [8]. Эти углы накрест лежащие при прямых AB и OM и секущей BM. Значит, $AB \parallel OM$ (9).

- Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма [1, 3]. Следовательно, $BO = OD$. Откуда OM — средняя линия $\triangle ABD$ (10) [9]. То есть $MD = AM = BM$ (11) [8]. Медиана BM равна половине стороны AD, к которой проведена, следовательно, $\triangle ABD$ прямоугольный, $\angle ABD = 90°$. Таким образом, $AB \perp BD$, что и требовалось доказать.

б) Решение:

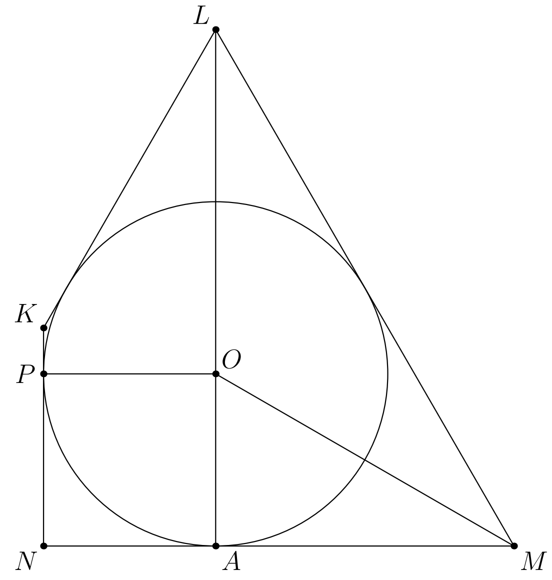
- $\angle BMA = 60°$ [8]. Находим смежный ему $\angle BMD = 120°$. Далее $\triangle BMD$ равнобедренный [11], OM его медиана, а значит и биссектриса [10]. То есть $\angle BMO = \angle DMO = 60°$ (12).

- Находим $AB = 2OM = 4$ [7, 10]. А значит, и $MD = BM = 4$ (13) [11].

- Точка K — точка пересечения медиан треугольника ABD [10]. Откуда $BK : KM = 2 : 1$. Находим $KM = \frac{1}{3} \cdot BM = \frac{4}{3}$ (14) [13].

- $S_{OMK} = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot OM \cdot \sin \angle BMO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ [7, 12, 14]. Аналогично $S_{OMD} = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot OM \cdot \sin \angle DMO = 2\sqrt{3}$ [7, 12, 13]. Окончательно $S_{KODM} = S_{OMK} + S_{OMD} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

б) Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



а) Дано:

окружность $\omega(O)$ вписана в $KLMN$ (1), ω касается MN в точке A (2), $\angle MNK = 90^\circ$ (3), $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$ (4).

а) Доказать:

$A \in LO$.

б) Дано:

$LA = 9$ (5).

б) Найти:

$MN = ?$

а) Доказательство:

- Окружность, вписанная в угол, лежит на его биссектрисе. Следовательно, $\angle KLO = \angle MLO = 30^\circ$ и $\angle NMO = \angle LMO = 30^\circ$ (6) [1, 4].
- По сумме углов $\triangle LOM$ находим $\angle LOM = 120^\circ$ (7) [6]. $\angle OAM = 90^\circ$ (8) как угол между касательной и радиусом [2]. По сумме углов $\triangle AOM$ находим $\angle AOM = 60^\circ$ (9) [6].
- $\angle AOM + \angle LOM = 180^\circ$ [7, 9]. Следовательно, точки L, O и M лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

б) Решение:

- В прямоугольном $\triangle ALM$ имеем $AM = LA \cdot \operatorname{ctg} \angle LMN$ [8]. Находим $AM = 3\sqrt{3}$ (10) [4, 5]. В прямоугольном $\triangle AOM$ имеем $AO = AM \cdot \operatorname{tg} \angle NMO$ [8]. Находим $AO = 3$ (11) [6].
- Пусть $P \in NK$, $OP \perp NK$. Тогда $OP = OA$ как радиусы окружности ω. Следовательно, $OPNA$ — квадрат [3, 8]. Откуда $AN = AO = 3$ [11]. Окончательно находим $MN = AN + AM = 3 + 3\sqrt{3}$ [10].

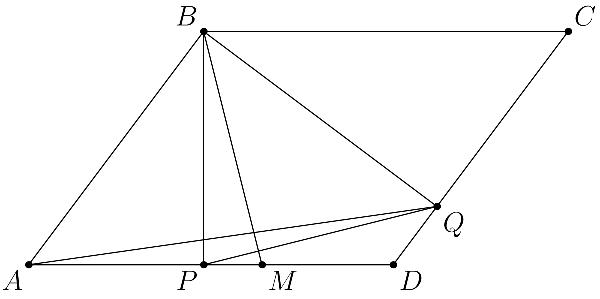
б) Ответ: $3 + 3\sqrt{3}$.

а) Дано:
$ABCD$ — параллелограмм (1),
$P \in AD$,
$Q \in CD$,
$BP \perp AD$ (2),
$BQ \perp CD$ (3),
$M \in AD$,
$AM = BP$ (4),
$AB = BQ$ (5).

а) Доказать:
$BM = PQ$.

б) Дано:
$AM = BP = 12$ (6),
$AB = BQ = 15$ (7).

б) Найти:
$S_{APQ} = ?$



а) Доказательство:

- Обозначим $\angle BAP = \alpha$. Тогда по сумме углов $\triangle ABP$ находим $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$ [2]. Далее $\angle BCD = \alpha$, так как $ABCD$ — параллелограмм [1]. По сумме углов $\triangle BCQ$ находим $\angle CBQ = 90^\circ - \alpha$ [3]. $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ как внутренние односторонние углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AB [1]. Тогда вычисляем $\angle PBQ = \angle BAP = \alpha$ (8).
- $\triangle MAB = \triangle PBQ$ по двум сторонам и углу между ними [4, 5, 8]. Следовательно, $BM = PQ$ (9), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- По теореме Пифагора для $\triangle ABP$ имеем $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2}$ [2]. Находим $AP = 9$ (10) [6, 7]. Тогда $PM = AM - AP = 3$ (11) [6].
- По теореме Пифагора для $\triangle BPM$ имеем $BM = \sqrt{BP^2 + PM^2}$ [2]. Находим $BM = 3\sqrt{17}$ [6, 11]. Тогда $PQ = BM = 3\sqrt{17}$ (12) [9].
- По теореме косинусов для $\triangle BPQ$ имеем $BQ^2 = BP^2 + PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot PQ \cdot \cos\angle BPQ$. Находим $\cos\angle BPQ = \frac{\sqrt{17}}{17}$ (13) [6, 7, 12].
- Находим $\sin\angle APQ = \sin(90^\circ + \angle BPQ) = \cos\angle BPQ = \frac{\sqrt{17}}{17}$ [2, 13]. Тогда вычисляем $S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ \cdot \sin\angle APQ = 13{,}5$ [10, 12].

б) Ответ: 13,5.

а) Дано:

$\omega_1(O_1, R)$ и $\omega(O_2, r)$ — окружности,
K — точка касания ω_1 и ω_2 (1),
$K \in O_1O_2$,
AB — общая касательная ω_1 и ω_2 (2),
$A \in \omega_1$, $B \in \omega_2$,
$C = AK \cap \omega_2$,
$D = BK \cap \omega_1$.

а) Доказать:

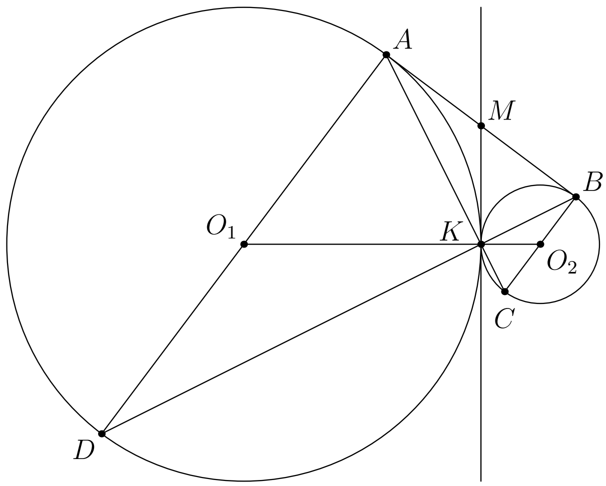
$AD \parallel CB$.

б) Дано:

$R = 4$ (3),
$r = 1$ (4).

б) Найти:

$S_{AKB} = ?$



а) Доказательство:

- Пусть l — общая касательная ω_1 и ω_2, проходящая через точку K. Обозначим $M = l \cap AB$. Тогда $MA = MK$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки [1, 2]. Тогда $\triangle AMK$ равнобедренный с основанием AK, то есть $\angle MAK = \angle MKA$ (5). Аналогичными рассуждениями получаем $\angle MBK = \angle MKB$ (6).
- $\angle AKB = \angle MKA + \angle MKB$. Тогда по сумме углов $\triangle AKB$ получаем, что $2\angle MKA + 2\angle MKB = 180°$ [5, 6]. Откуда $\angle AKB = 90°$, то есть $AC \perp BD$ (7).
- $\angle AKD = 180° - \angle AKB = 90°$ [7] как смежные. То есть хорда AD является диаметром ω_1. А значит, $AD \perp AB$ (8) [2]. Аналогичными рассуждениями получаем, что хорда CB является диаметром ω_2, и $CB \perp AB$. Прямые AD и CB перпендикулярны прямой AB. Следовательно, $AD \parallel CB$ (9), что и требовалось доказать.

б) Решение:

- $AD = 2R = 8$ (10) как диаметр ω_1 [3]. $CB = 2r = 2$ (11) как диаметр ω_2 [4].
- $\angle ADB = \angle CBD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC [9]. При этом $\angle AKD = \angle CKB$ как вертикальные. Откуда $\triangle AKD \sim \triangle CKB$ по двум углам, то есть $\frac{AD}{CB} = \frac{DK}{BK}$. Отсюда находим $DK = 4BK$ [10, 11]. Обозначим $BK = x$ (12), тогда $DK = 4x$ (13).
- AK — высота, проведенная из прямого угла [7, 8]. Откуда $AK = \sqrt{BK \cdot DK}$. Находим $AK = 2x$ (14) [12, 13]. По теореме Пифагора для $\triangle ADK$ имеем $AD^2 = AK^2 + DK^2$ [7]. То есть $64 = 16x^2 + 4x^2$ [3, 11, 12]. Решив это уравнение, находим $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (15).
- Имеем $S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BK$ [7]. То есть $S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x$ [12, 14]. Находим $S_{AKB} = \frac{16}{5}$ [15].

б) Ответ: $\frac{16}{5}$.

ОТВЕТЫ

№1 96;

№A1 50;

№2 $18\sqrt{2}$;

№A2 $9\sqrt{2}$;

№3 9;

№A3 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$;

№4 4;

№A4 1;

№5 12;

№A5 5;

№6 1;

№A6 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

№7 $\frac{243}{25}$;

№A7 20,48;

№8 $2\sqrt{15}$;

№A8 7;

№9 $\frac{5}{4}$;

№A9 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

№10 11;

№A10 10;

№11 $2\sqrt{2}$;

№A11 4;

№12 $\frac{240}{17}$;

№A12 4,8;

№13 80;

№A13 19;

№14 $\frac{63\sqrt{15}}{64}$;

№A14 $\frac{5\sqrt{7}}{8}$;

№15 $\frac{72\sqrt{3}}{7}$;

№A15 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$;

№16 $4\sqrt{3}$;

№A16 3;

№17 $4\sqrt{6}$;

№A17 $2\sqrt{15}$;

№18 $20\sqrt{3}$;

№A18 $5\sqrt{3}$;

№19 $\frac{8\sqrt{5}}{3}$;

№A19 1,92;

№20 $432\sqrt{7}$;

№A20 $4\sqrt{2}$;

№21 $\frac{3}{2}$;

№A21 $\frac{3}{2}$;

№22 $\frac{7}{25}$;

№A22 $\frac{4}{5}$;

№23 28;

№A23 18;

№24 $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$;

№A24 $\operatorname{arctg}\left(\frac{15-\sqrt{33}}{8}\right)$;

№25 $\frac{73\sqrt{35}}{4}$;

№A25 $\frac{27\sqrt{15}}{4}$;

№26 3;

№A26 5;

№27 $\frac{\sqrt{3}(34-\sqrt{127})}{14}$;

№A27 2;

№28 $\frac{47}{10}$;

№A28 $\frac{46}{3}$;

№29 $\frac{46}{9}$;

№A29 14;

№30 $\frac{75}{4}$;

№A30 72;

№31 49;

№A31 5;

№32 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$;

№A32 $\frac{5\sqrt{130}}{3}$;

№33 $\frac{12}{13}$;

№A33 $\frac{4}{5}$;

№34 $12\sqrt{7}$;

№A34 15;

№35 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$;

№A35 $\frac{75}{4}$;

№36 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$;

№A36 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

№37 2;

№A37 3;

№38 $\frac{64\sqrt{15}}{105}$;

№A38 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$;

№39 $\sqrt{10}$;

№A39 $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$;

№40 $6\sqrt{3}$;

№A40 4;

№41 $\frac{4}{9}$;

№A41 $\frac{16}{25}$;

№42 $\frac{1}{2}$;

№A42 $\frac{3}{7}$;

№43 $60\sqrt{6}$;

№A43 $\frac{15\sqrt{15}}{2}$;

№44 $\frac{7}{17}$;

№A44 $\frac{1}{7}$;

№45 55;

№A45 21;

№46 18;

№A46 1;

№47 10;

№A47 9;

№48 $\frac{41}{5}$;

№A48 41;

№49 $\frac{324}{7}$;

№A49 45;

№50 $\frac{169}{5}$;

№A50 $\frac{29}{2}$;

№51 24;

№A51 6;

№52 $\frac{1}{4}$;

№A52 $\frac{3}{4}$;

№53 $\frac{1}{2}$;

№A53 $\frac{3}{4}$;

№54 $\frac{169}{48}$;

№A54 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$;

№55 36;

№A55 28;

№56 $\frac{120}{17}$;

№A56 $\frac{3\sqrt{14}}{2}$;

№57 20;

№A57 $\frac{5\sqrt{6}}{32}$;

№58 5;

№A58 3;

№59 $25\sqrt{3}$;

№A59 $\frac{25\sqrt{3}}{3}$;

№60 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$;

№A60 $24\sqrt{3}$;

№61 $3+3\sqrt{3}$;

№A61 $\frac{6-\sqrt{3}}{6}$;

№62 13,5;

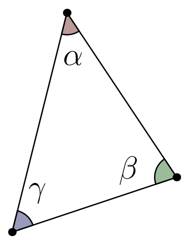
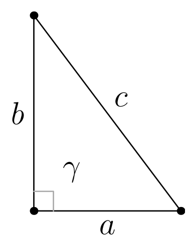
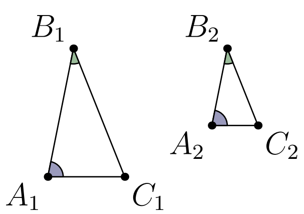
№A62 97;

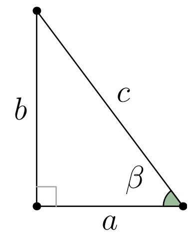
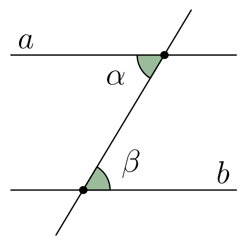
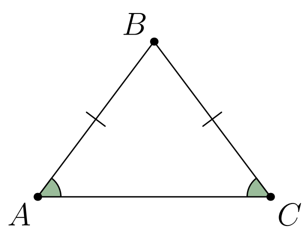
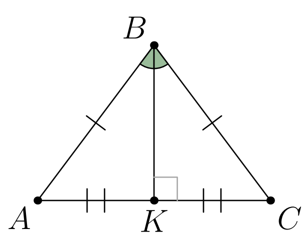
№63 $\frac{16}{5}$.

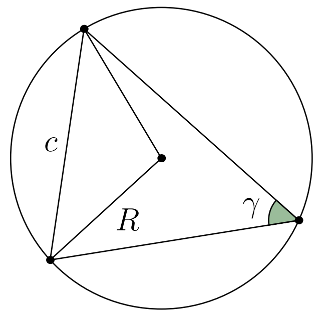
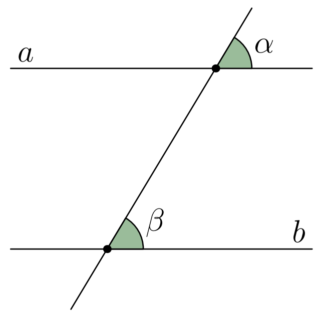
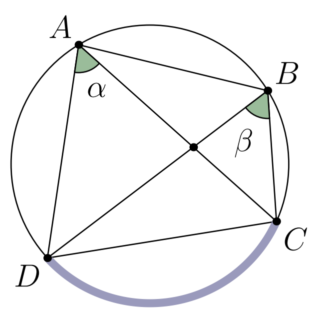
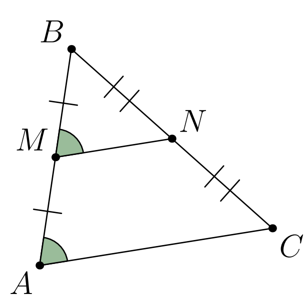
№A63 $\frac{12\sqrt{6}}{7}$;

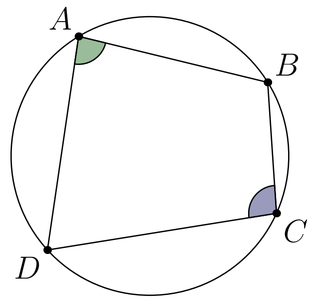
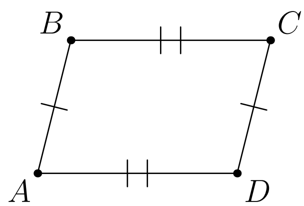
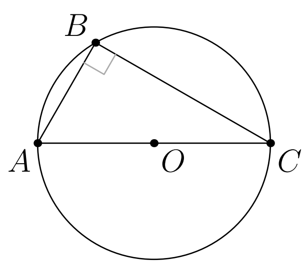
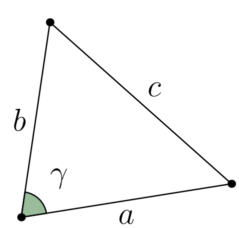
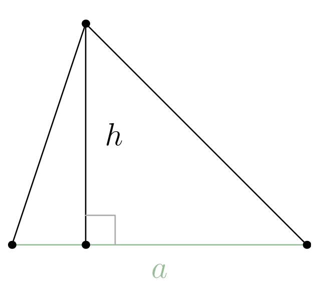
СПРАВОЧНИК ТЕОРЕМ

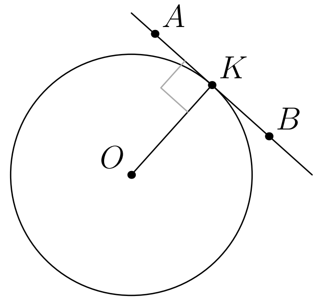
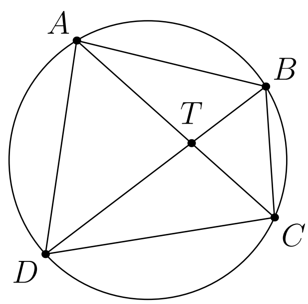
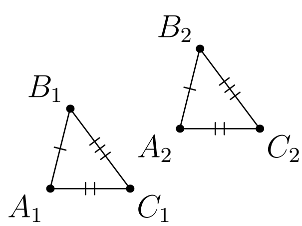
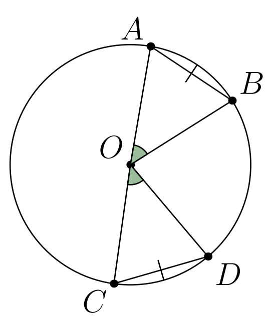
В таблице ниже собраны утверждения, которые потребовались автору при решении задач этого сборника. Теоремы в таблице отсортированы по частоте применения. Под каждым утверждением можно найти кликабельный список задач, в которых это утверждение пригодилось.

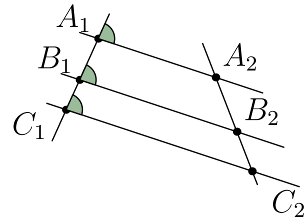
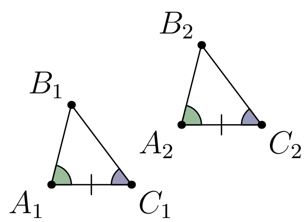
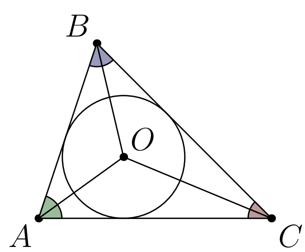
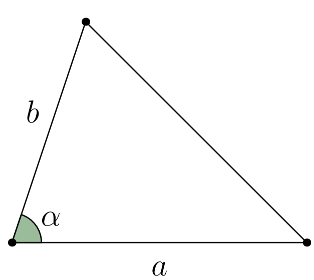
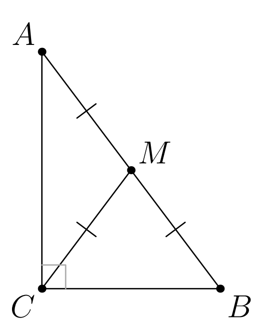
<table>
<tr><th>№</th><th>Утверждение</th><th>Чертеж</th><th>Формулировка</th><th>Доля</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Сумма углов треугольника</td><td>
</td><td>Для любого треугольника верно $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$</td><td>48%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №2, №5, №6, №8, №9, №11, №18, №19, №21, №22, №25, №27, №30, №31, №32, №34, №38, №40, №41, №42, №43, №44, №49, №52, №53, №58, №59, №61, №62, №63.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Теорема Пифагора и обратная ей</td><td>
</td><td>$\gamma=90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$</td><td>44%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №2, №6, №8, №9, №10, №11, №12, №13, №17, №19, №20, №21, №23, №24, №26, №29, №30, №32, №35, №36, №40, №43, №46, №51, №54, №56, №62, №63.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Первый признак подобия треугольников</td><td>
</td><td>$\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B_1=\angle B_2$ $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$</td><td>43%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №2, №3, №7, №10, №12, №13, №17, №21, №23, №28, №29, №30, №33, №36, №37, №39, №40, №41, №43, №45, №46, №52, №55, №56, №57, №58, №63.</td></tr>
</table>

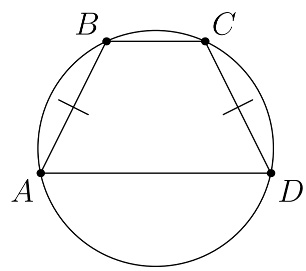
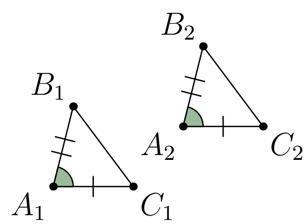
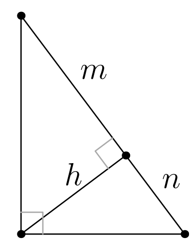
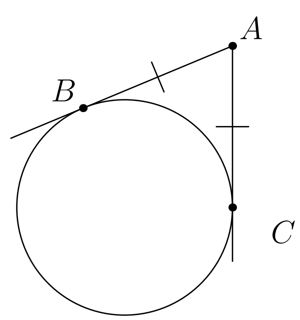
4	Соотношения сторон прямоугольного треугольника		$\sin\beta = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$	40%
Задачи: №5, №8, №9, №15, №18, №19, №20, №21, №22, №24, №25, №28, №29, №30, №31, №32, №35, №38, №42, №43, №44, №52, №54, №59, №61.				
5	Критерий параллельных прямых: накрест лежащие углы		$\alpha = \beta \Leftrightarrow a \parallel b$	38%
Задачи: №1, №4, №7, №15, №16, №17, №19, №20, №27, №28, №30, №32, №33, №37, №42, №44, №45, №48, №50, №55, №57, №60, №62, №63.				
6	Критерий равнобедренного треугольника: равные углы при основании		$\angle A = \angle C \Leftrightarrow AB = BC$	37%
Задачи: №3, №8, №9, №11, №14, №18, №22, №25, №27, №28, №31, №32, №34, №35, №42, №44, №45, №48, №49, №58, №59, №60, №63.				
7	Критерий равнобедренного треугольника: биссектриса = медиана = высота		BK — биссектриса, медиана и высота $\Leftrightarrow AB = BC$	35%
Задачи: №1, №3, №6, №9, №11, №16, №19, №20, №23, №28, №33, №35, №36, №38, №41, №46, №49, №50, №53, №54, №59, №60.				

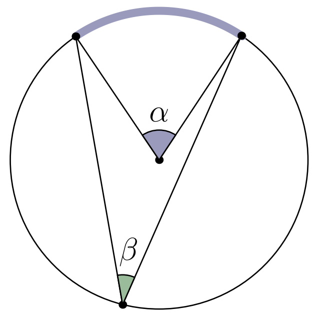
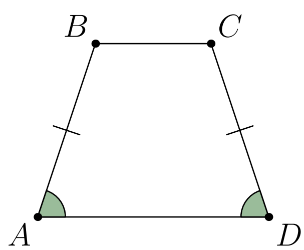
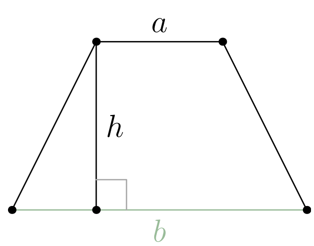
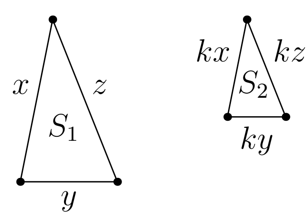
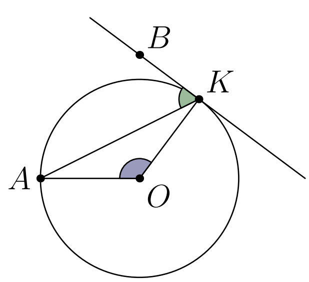
8	Теорема синусов		Для любого треугольника верно $\dfrac{c}{\sin\ \gamma} = 2R$	25%
Задачи: №6, №9, №15, №16, №25, №27, №32, №34, №35, №38, №39, №42, №44, №46, №54, №58.				
9	Критерий параллельных прямых: соответственные углы		$\alpha = \beta \Leftrightarrow a \parallel b$	24%
Задачи: №3, №6, №11, №12, №16, №17, №18, №19, №25, №37, №39, №45, №52, №53, №56.				
10	Критерий вписанного четырехугольника: равные вписанные углы		$ABCD$ вписан в окружность $\Leftrightarrow \alpha = \beta$	22%
Задачи: №3, №8, №14, №15, №17, №18, №20, №21, №29, №31, №39, №46, №52, №58.				
11	Критерий средней линии		$AM = BM$ и $BN = CN$ $\Leftrightarrow AM = BM$ и $MN \parallel AC$	22%
Задачи: №1, №6, №16, №22, №23, №32, №34, №39, №49, №50, №51, №53, №54, №60.				

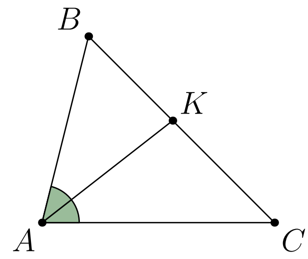
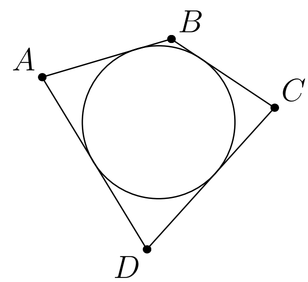
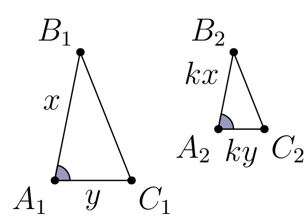
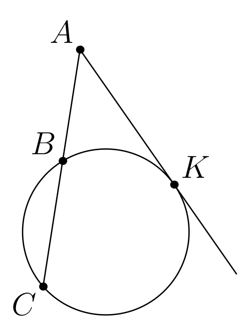
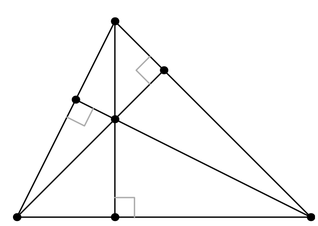
<table>
<tr><td>12</td><td>Критерий вписанного четырехугольника: сумма противоположных углов</td><td>
</td><td>$ABCD$ вписан в окружность $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180°$</td><td>21%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №6, №14, №16, №20, №21, №31, №32, №38, №45, №46, №49, №50, №52.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Критерий параллелограмма</td><td>
</td><td>$AB \parallel CD,\ BC \parallel AD \Leftrightarrow AB = CD,\ BC = AD$</td><td>21%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №10, №16, №19, №24, №27, №32, №35, №37, №47, №48, №54, №56, №57.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>На диаметр опирается прямой угол</td><td>
</td><td>AC — диаметр $\Leftrightarrow \angle B = 90°$</td><td>19%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №5, №7, №15, №16, №17, №19, №22, №24, №29, №50, №54, №63.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Теорема косинусов</td><td>
</td><td>Для любого треугольника верно $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$</td><td>17%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №14, №15, №21, №27, №30, №34, №38, №39, №41, №58, №62.</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Формула площади треугольника: основание и высота</td><td>
</td><td>$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$</td><td>17%</td></tr>
<tr><td colspan="5">Задачи: №1, №2, №13, №19, №26, №31, №43, №51, №57, №59, №63.</td></tr>
</table>

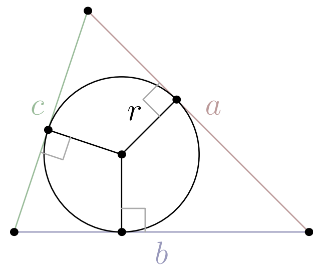
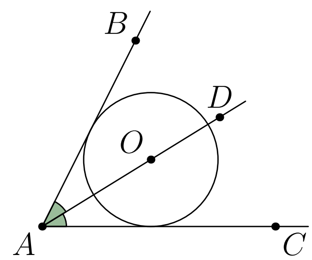
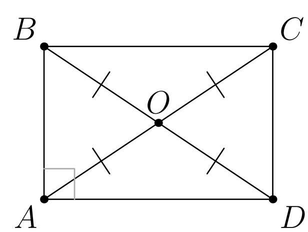
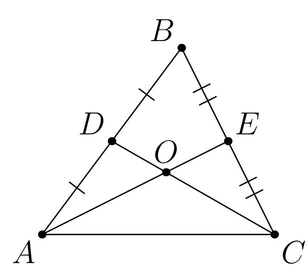
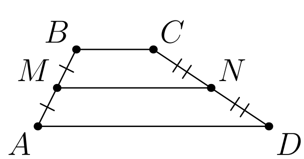
17	Критерий касательной: угол между касательной и радиусом		AB — касательная $\Leftrightarrow AB \perp OK$	14%
Задачи: №4, №22, №23, №24, №38, №49, №50, №57, №61.				
18	Критерий пересекающихся хорд		$ABCD$ вписан в окружность $\Leftrightarrow AT \cdot CT = BT \cdot DT$	13%
Задачи: №15, №17, №19, №39, №47, №48, №49, №50.				
19	Третий признак равенства треугольников		$A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$, $B_1C_1 = B_2C_2 \Rightarrow$ $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$	11%
Задачи: №1, №3, №20, №28, №36, №41, №54.				
20	Равенство хорд, стягивающих равные дуги		$\angle AOB = \angle COD \Leftrightarrow$ $AB = CD$	11%
Задачи: №5, №7, №19, №29, №31, №32, №48.				

21	Теорема о пропорциональных отрезках и обратная ей		$A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \Leftrightarrow$ $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$	11%
Задачи: №1, №4, №10, №22, №33, №36, №53.				
22	Второй признак равенства треугольников		$A_1C_1 = A_2C_2$, $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$ $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$	11%
Задачи: №2, №9, №19, №37, №42, №44, №45.				
23	Точка пересечения биссектрис		Три биссектрисы треугольника пересекаются центре вписанной в него окружности	10%
Задачи: №27, №38, №42, №44, №49, №50.				
24	Формула площади треугольника: две стороны и угол между ними		$S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$	10%
Задачи: №14, №15, №27, №33, №60, №62.				
25	Критерий медианы прямоугольного треугольника		$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow$ $AM = BM = CM$	10%
Задачи: №1, №2, №6, №13, №59, №60.				

26	Равнобедренная трапеция вписана в окружность		$ABCD$ — трапеция, $AB = CD \Leftrightarrow ABCD$ вписана в окружность	10%
Задачи: №15, №18, №20, №34, №47, №57.				
27	Первый признак равенства треугольников		$A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$, $\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow$ $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$	10%
Задачи: №7, №23, №32, №54, №57, №62.				
28	Свойство высоты, проведенной к гипотенузе		h — высота, проведенная к гипотенузе, $\Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n}$	8%
Задачи: №2, №7, №21, №23, №63.				
29	Равенство касательных, проведенных из одной точки		AB и AC — отрезки касательных $\Rightarrow AB = AC$	8%
Задачи: №4, №24, №26, №50, №63.				

30	Связь центрального и вписанного угла, опирающихся на одну дугу		α — центральный угол, β — вписанный. α и β опираются на одну дугу $\Rightarrow \alpha = 2\beta$	8%
Задачи: №5, №9, №12, №13, №58.				
31	Критерий равнобедренной трапеции		$\angle A = \angle D \Leftrightarrow AB = CD$	6%
Задачи: №25, №32, №42, №44.				
32	Формула площади трапеции		a и b — основания трапеции $\Rightarrow S = \frac{a+b}{2} \cdot h$	6%
Задачи: №18, №20, №23, №25.				
33	Отношение площадей подобных треугольников		$\frac{S_2}{S_1} = k^2$	6%
Задачи: №30, №41, №45, №55.				
34	Критерий касательной: угол между касательной и хордой		BK — касательная $\Leftrightarrow \angle AOK = 2\angle AKB$	6%
Задачи: №12, №39, №57, №60.				

35	Свойство биссектрисы		AK — биссектриса $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{KB}{KC}$	5%
Задачи: №14, №33, №45.				
36	Критерий описанного четырехугольника		$ABCD$ описан вокруг окружности $\Leftrightarrow AB+CD = AD+BC$	5%
Задачи: №12, №26, №51.				
37	Второй признак подобия треугольников		$\angle A_1 = \angle A_2$, $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$	3%
Задачи: №26, №55.				
38	Теорема о касательной и секущей		AK — касательная, AC — секущая $\Rightarrow AK^2 = AB \cdot AC$	3%
Задачи: №36, №39.				
39	Точка пересечения высот		Три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке	3%
Задачи: №9, №11.				

40	Формула площади треугольника: полупериметр и радиус вписанной окружности		$p = \dfrac{a+b+c}{2}$, $S = p \cdot r$	3%
Задачи: №26, №27.				
41	Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе		$\omega(O)$ вписана в $\angle BAC$ с биссектрисой AD $\Rightarrow O \in AD$	2%
Задачи: №61.				
42	Критерий прямоугольника		$ABCD$ — прямоугольник $\Leftrightarrow$ $AO = BO = CO = DO$	2%
Задачи: №7.				
43	Точка пересечения медиан		O — точка пересечения медиан AE и CD в $\triangle ABC \Rightarrow$ $AO : OE = CO : OD = 2 : 1$	2%
Задачи: №60.				
44	Формула средней линии трапеции		MN — средняя линия трапеции $ABCD$ $\Rightarrow MN = \dfrac{AD+BC}{2}$	2%
Задачи: №4.				