Методические рекомендации:

Уважаемые коллеги!

В этом файле представлен разбор уравнения с реального ЕГЭ. Ниже указан список умений и навыков, необходимых выпускникам для успешного выполнения данного задания. Для вашей работы с учениками рекомендуем следующий порядок использования файла:

1. Выдать последовательно подготовительные задачи из файла. Если на какой-то из задач возникли различного рода трудности, то рекомендуется подробнее разобрать её с учениками и дать отдельно задания на отработку умений и навыков, которые нужны для решения этой опорной задачи.
2. Разобрать с учениками задачу из реального ЕГЭ, обратив внимание на те моменты в решении, в которых задействуются умения и навыки из подготовительных задач.
3. После этого можно предложить ученикам задачи для самостоятельного решения. При этом необходимо контролировать процесс, чтобы устранять возникающие трудности и ошибки. При необходимости вернуться к пункту 1.
4. После задач приведено оформление решения, которое будет принято экспертом безо всяких дополнительных пояснений.

Желаем успехов!

Умения и навыки:

- ○ Использование свойств степеней.
- ○ Решение простейших показательных уравнений.
- ○ Использование формул приведения.
- ○ Решение простейших тригонометрических уравнений.
- ○ Решение однородных тригонометрических уравнений первой степени.
- ○ Отбор корней, принадлежащих некоторому отрезку.

Тригонометрическое уравнение

а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Упростим уравнение, приведя степени к одному основанию:

$$\left(7^{-2}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)};$$

$$7^{-2\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)};$$

$$-2\sin(x+\pi) = 2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Воспользовавшись формулами приведения, получаем:

$$2\sin x = 2\sqrt{3}\cos x.$$

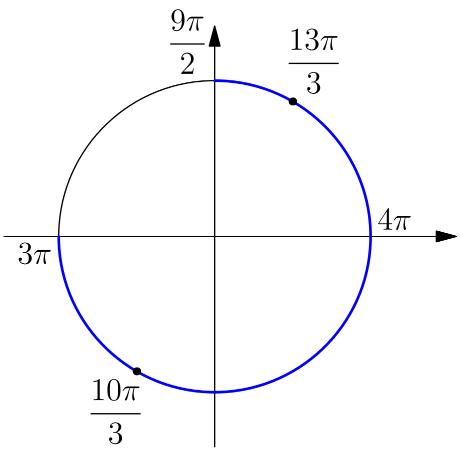
Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$ (иначе получаем противоречие основному тригонометрическому тождеству), тогда:

$$2\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни с помощью тригонометрической окружности.



Получаем, что $x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$, $x_2 = 4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

Подготовительные задачи:

1. Найдите значение выражения:

а) $(64^9)^3 : (16^5)^8$;

в) $\dfrac{8^{11} \cdot 32^{-2}}{4^7}$;

б) $\dfrac{3^{111}}{9^{-55}} \cdot 3^{-220}$;

г) $\dfrac{7^6}{5^{-6} \cdot 35^5}$.

2. Упростите выражение:

а) $\sin^2(\pi - \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$;

в) $\sin(\pi - x)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos(\pi - x)$;

г) $\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(2\pi + \alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

3. Решите уравнение:

а) $2^{7-3x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}$;

в) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{7x-3}$;

б) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;

г) $3^{x^2-3x+2} = 1$.

4. Решите уравнение:

а) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$;

г) $\sqrt{3}\sin\left(\pi - \dfrac{x}{3}\right) - 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{3}\right) = 0$.

5. Запишите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

а) $(36^{\sin x})^{-\cos x} = 6^{\sin x}$;

б) $(81^{\cos x})^{\sin x} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}\cos x}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. а) Решите уравнение
$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 3^{2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

2. а) Решите уравнение
$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 5^{2\cos(2\pi - x)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответы:

Подготовительные задачи:

1. а) 4;
   б) 3;
   в) 512;
   г) 35.
2. а) 1;
   б) 1;
   в) 1;
   г) -1.
3. а) 1,5;
   б) $-\dfrac{1}{3}$;
   в) 1;
   г) 1; 2.
4. а) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
   б) $\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
   в) $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$;
   г) $\pi+3\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
5. а) $0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$;
   б) $\pm\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. а) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{13\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{4}$.
2. а) $\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. б) $\dfrac{13\pi}{6}$.

Чистовой вариант оформления

а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение:

а)

$$7^{-2\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)};$$

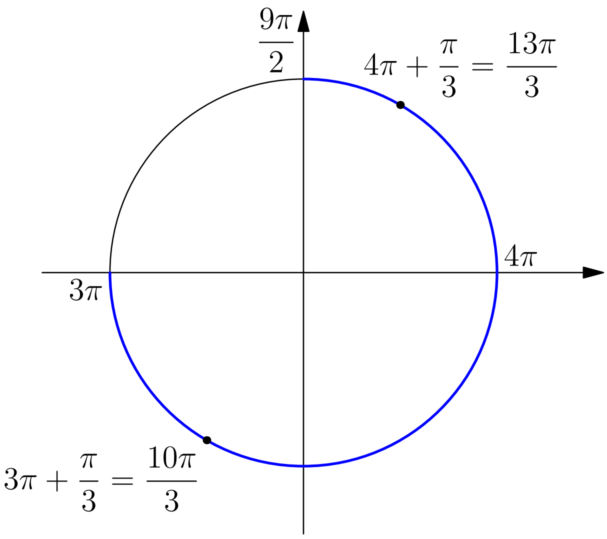
$$-2\sin(x+\pi) = 2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$2\sin x = 2\sqrt{3}\cos x \mid : \cos x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б)



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$.